

Matematika 2 építészmérnököknek

10. gyakorlat (2004. 05. 12. illetve 13.)

Valószínűségszámítás II.

(gyak. vez.: Rudas Anna)

Diszkrét eloszlású valószínűségi változók

Emlékeztető: Egy diszkrét eloszlású valószínűségi változót (ξ) azzal jellemzünk, hogy megadjuk az általa felvehető értékeket (x_i), és minden ilyen értékhez hozzárendeljük azt a valószínűséget (p_i), amennyi valószínűséggel felveszi azt az értéket. (Ld. az alábbi példákban.) A valószínűségi változó várható értéke

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i p_i,$$

ahol az összegzés tehát az összes lehetséges értékre történik, azokat adjuk össze, megsúlyozva a valószínűségükkel. A szórásnégyzetet a következő képlettel számoljuk:

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i p_i \right)^2.$$

A szórás pedig a szórásnégyzet négyzetgyöke: $\mathbb{D}(\xi) = \sqrt{\mathbb{D}^2(\xi)}$.

1. Két kockával dobunk. Jelentse ξ a nagyobbik számot. (Ha a két szám egyenlő, akkor azt.) Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlását, számoljuk ki a várható értéket!

Megoldás: Az eloszlást egy táblázatban adjuk meg:

$$\begin{array}{l} \text{lehetséges értékek:} \\ \text{valószínűségek:} \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{array} \right.$$

Egy kis magyarázat: pl. három akkor lesz ξ értéke, ha $(1;3), (3;1), (2;3), (3;2)$, vagy $(3;3)$ a két kockán az eredmény, ez 5 eset az összesen lehetséges 36 közül. Ezért a 3-as szám alatt az $\frac{5}{36}$ valószínűség áll.

A várható érték:

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = 4,47.$$

2. Egy fiú pénzt dobál addig, amíg fejet nem kap, de türelmetlenül abbahagyja, ha 5 dobásból sem sikerült fejet dobnia. Mi a dobássorozat hosszának eloszlása? Várható értéke? Szórása?

Megoldás: A dobássorozat hossza legyen ξ , ennek eloszlását megint táblázatban adjuk meg:

$$\begin{array}{l} \text{lehetséges értékek:} \\ \text{valószínűségek:} \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{array} \right.$$

Egy kis magyarázat: pl. négyszer pontosan akkor dob a kisfiú, ha az első három dobás írás, a negyedik pedig fej. Ennek valószínűsége $\frac{1}{16}$.

A várható érték:

$$\mathbb{E}(\xi) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 5 \cdot \frac{1}{16} = 1,94.$$

A szóráshoz előbb ki kell számolni a szórásnégyzetet:

$$\mathbb{D}^2(\xi) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{8} + 16 \cdot \frac{1}{16} + 25 \cdot \frac{1}{16} - 1,94^2 = 5,1875 - 3,7636 = 1,4239$$

ebből a szórás gyökvonással

$$\mathbb{D}(\xi) = \sqrt{1,4239} = 1,19.$$

Folytonos eloszlású valószínűségi változók

Emlékeztető:

1. 1