Matematika 2 építészmérnököknek

9. gyakorlat (2004. 05. 05. illetve 06.)

Valószínűségszámítás I.

(gyak. vez.: Rudas Anna)

Műveletek eseményekkel

Emlékeztető: Az eseményekre halmazokként gondolunk, két eseménynek az összegéről és szorzatáról is beszélhetünk: $A + B$ jelenti azt az eseményt, hogy az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezett (UNIÓ), AB pedig hogy mindkettő bekövetkezett (METSZET).

1. *Feladat*: Jelölje A_i azt az eseményt, hogy a kockadobás eredménye i. Legyen B az az esemény, hogy a dobás eredménye páros szám, C pedig az, hogy a dobás eredménye négynél kisebb.

   (a) Fejezzük ki B-t illetve C-t az A_i események segítségével!
   Megoldás: $B = A_2 + A_4 + A_6$
   $C = A_1 + A_2 + A_3$

   (b) Mit jelentenek a következő kifejezések: $\overline{B}$, $\overline{C}$, A_2B, A_5C, BC, $\overline{B} + C$, $B + C + A_5$?
   Megoldás: $\overline{B}$: páratlant dobtam,
   $\overline{C}$: háromnál nagyobbat dobtam,
   A_2B: 2-est dobtam,
   A_5C: lehetetlen esemény,
   BC: 2-est dobtam,
   $\overline{B} + C$: 1-et vagy 2-t vagy 3-at vagy 5-öt dobtam,
   $B + C + A_5$: biztos esemény.

2. *Feladat*: Feldobunk három különböző pénzérmét, pl. 1Ft-os, 2Ft-os és 5Ft-os érmét. Jelöljék a következő betűk a következő eseményeket: A: az 1Ft-os érmén fejet dobunk. B: az 2Ft-os érmén fejet dobunk. C: az 5Ft-os érmén fejet dobunk. Fejezzük ki A, B és C segítségével a következő eseményeket:

   (a) Csak az 1Ft-ossal dobunk fejet
   Megoldás: $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

   (b) Pontosan egy fejet dobunk
   Megoldás: $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B\overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$

   (c) Legalább egy fejet dobunk
   Megoldás: $\overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}}$

   (d) Legfeljebb egy fejet dobunk
   Megoldás: $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B\overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$

Kombinatorika

Emlékeztető: $n!$ azt jelenti, hogy n-től lefelé összeszorozzunk a pozitív egész számokat. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, kiolvasva „$n$ alatt a k”, ennyiféleképp választhatunk ki n különböző dolog közül k-t, ha a sorrend nem számít.

1. Az olimpiai döntőbe 8 futó került be.

   (a) Hányféle befutási sorrend lehet?
   Megoldás: $8!$

   (b) Hányféle sorrend lehet a dobogón?
   Megoldás: $\frac{8!}{5!}$

2. Hány háromjegyű szám van? Hány olyan háromjegyű szám van, aminek a jegyei mind különbözőek?

   Megoldás: $9 \cdot 10 \cdot 10$ db háromjegyű szám van, ezek közül $9 \cdot 9 \cdot 8$ olyan, aminek a jegyei különbözőek.

3. Hány NEPTUN-kódot lehet generálni?

   Megoldás: 26 betű és 10 számjegy van összesen, ezek bármelyike kerülhet a NEPTUN-kód 6 helyére. Ennek megfelelően 36^6-féle NEPTUN-kód lehetséges.

4. Egy 20-tagú csoportból hány különböző háromtagú elnökséget lehet választani? (Három tisztség van az elnökségen belül.)

   Megoldás: $\frac{20!}{17!}$

5. Bridge kártyából kiveszünk két ászt. Hányféle lehet ez?

   Megoldás: Összesen 4 db ász van a pakliban, ezek közül $\binom{4}{2} = 6$-féleképp lehet kettőt kiválasztani (a sorrend nyilván nem számít).

6. Az 52 lapos Bridge kártyából 13-at osztanak nekem. Hányféle lehet ez?

   Megoldás: $\binom{52}{13}$

7. Hányféleképp lehet sorbarakni a MŰEGYETEM szó betűit?

   Megoldás: 9 betű van, ezek közül 2 db egyforma (M) illetve 3 db egyforma (E) található. A létrehozható „szavak" száma $\frac{9!}{2!3!}$.

8. Egy bolha ugrál a számegyenesen. Egy ugrás egy egység. Hányféleképp juthat el a 0-ból 12 ugrással a +6 pontba?

   Megoldás: Ahhoz, hogy 12 ugrás után a kiindulási pontjától 6 hellyel jobbra találja magát, 9-szer kell jobbra, és 3-szor balra ugrania. Azt viszont tetszőlegesen választhatja meg, hogy a 12 ugrás közül melyik 3 alkalommal ugrik balra. A megoldás tehát $\binom{12}{3}$.

9. Feldobunk 5 különböző pénzdarabot. Hányféle dobáseredmény látható?

   Megoldás: Minden pénzérmén kétféle eredmény lehet. A megoldás ennek megfelelően 2^5. (Olyan ez, mint a NEPTUN-kódnál.)

Kombinatorikus valószínűségek

Emlékeztető: A jó esetek számat elosztva az összes eset számaval megkapjuk a kérdezett esemény valószínűségét (ha sikerült azonos val ű elemi eseményeket azonosítanunk).

1. Dobjunk fel két kockát. Mi a valószínűsége, hogy

   (a) a dobott számok összege 8?

   Megoldás: 5 esetben lehet a dobott számok összege 8 (2+6,3+5,4+4,5+3,6+2), összesen pedig 36-félét dobhatunk két kockával. A megoldás tehát $\frac{5}{36}$.

   (b) a dobott számok egyformák?

   Megoldás: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

   (c) a dobott számok különbözőek?

   Megoldás: A legegyszerűbb az, ha rájövünk, hogy ez az esemény és az előző egymást kizárók, és kettejük közül az egyik biztosan bekövetkezik (szebben: ez a két esemény teljes eseményrendszert alkot). Tehát a két valószínűség összege 1. Az eredmény tehát $\frac{5}{6}$.

   (d) mindkettő páros?

   Megoldás: 9-féleképp lehet mindkettő páros (hiszen 3-féle páros szám jöhet ki, 2 helyre, azaz 3^2). A valószínűség$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

2. Dobjunk fel 6 kockát. Mi a valószínűsége, hogy mind a 6 szám kijön?

   Megoldás: $\frac{6!}{6^6}$.

3. Egy kockát n-szer feldobunk. Mi a valószínűsége, hogy n-edikre lesz először hatos?

   Megoldás: Összesen 6^n-féle eredmény lehet, ha egy kockát n-szer feldobunk. Ezek közül 5^{n-1}-féle olyan van, ahol az n-edik az első hatos. (Hiszen az azt megelőző $n-1$ helyre mindegyikre 5-féle szám kerülhet.) Tehát a valószínűség$\frac{5^{n-1}}{6^n}$.

4. Egy kockát 3-szor feldobunk. Mi a valószínűsége, hogy

   (a) egyszer sem lesz hatos?

   Megoldás: $\frac{5^3}{6^3}$

   (b) pontosan egyszer lesz hatos?

   Megoldás: $3 \cdot \frac{5^2}{6^3}$

   (c) pontosan kétszer lesz hatos?

   Megoldás: ugyanaz, mint az előző, mert a 2 db hatost ugyanúgy 3-féleképp helyezhetem el a 3 helre, mint az 1 db hatost.

   (d) háromszor lesz hatos?

   Megoldás: $\frac{1}{6^3}$

Feltételes valószínűség, függetlenség

Emlékeztető: Az A esemény feltételes valószínűsége a B esemény fennállása mellett:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}.$$

A és B függetlenek, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Független eseményekre tehát $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Teljes eseményrendszer egy $\{A_i\}$ halmazrendszer, ha a benne szereplő halmazok diszjunktak, uniójuk pedig a biztos esemény. Teljes valószínűség tétele: ha $\{A_i\}$ teljes eseményrendszert alkot, akkor

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Bayes-tétel: ha $\{A_i\}$ teljes eseményrendszert alkot, akkor

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

1. Valaki két kockával dobott. Mi a valószínűsége, hogy pontosan az egyik hatos, feltéve, hogy a dobások különbözőek?

   Megoldás: Legyen E az az esemény, hogy az pontosan az egyik hatos, K pedig hogy a két dobás különböző.

$$\mathbb{P}(EH|K) = \frac{\mathbb{P}(EH \cdot K)}{\mathbb{P}(K)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{3}.$$

2. Három kockával dobtak. Mi a valószínűsége, hogy az egyik hatos (EH), feltéve, hogy a dobások különbözőek K?

   Megoldás:

$$\mathbb{P}(EH|K) = \frac{\mathbb{P}(EH \cdot K)}{\mathbb{P}K} = \frac{3\frac{5\cdot 4}{6^3}}{\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6^3}} = \frac{1}{2}.$$

3. Egy felmérésből tudjuk, hogy a fiúk 15%-ának a kedvenc színe a kék. Ugyanez az arány lányok esetében 10%. Egy csoportban van 6 fiú és 12 lány, véletlenszerűen kiválasztunk egy embert (mindenkinek azonos esélye van arra, hogy kiválasszák), mi a valószínűsége, hogy a kedvenc színe a kék?

   Megoldás: Legyen K hogy a kiválasztott diák kedvenc színe a kék, F hogy ő fiú, L hogy ő lány. Ekkor F és L teljes eseményrendszert alkot, így felhasználhatjuk a teljes valószínűség tételét, ez alapján

$$\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(K|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(K|L)\mathbb{P}(L)$$

   A felmérés azt mutatja, hogy $\mathbb{P}(K|F) = 0,15$ és $\mathbb{P}(K|L) = 0,1$, valamint az osztály összetételéből tudjuk, hogy $\mathbb{P}(F) = \frac{6}{20} = 0,4$ illetve $\mathbb{P}(L) = 0,6$. Ezeket behelyettesítve a fenti képletbe

$$\mathbb{P}(K) = 0,15 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,6 = 0,12.$$

4. Nézzük az előző szituációt egy másik kérdéssel: tegyük fel, hogy elárulják nekem, hogy a kiválasztott diák kedvenc színe a kék. Mennyi ennek ismeretében annak a valószínűsége, hogy az illető lány?

   Megoldás: Itt alkalmazzuk a Bayes-tételt,majd a kapott formulába behelyettesítjük az előbb megállapított értékeket:

$$\mathbb{P}(L|K) = \frac{\mathbb{P}(K|L)\mathbb{P}(L)}{\mathbb{P}(K|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(K|L)\mathbb{P}(L)} = \frac{0,1 \cdot 0,6}{0,15 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,6 = 0,12} = \frac{1}{2}.$$