Matematika 2 építészmérnököknek

1. gyakorlat (2004. 02. 11. illetve 12.)

Komplex számok

(gyak. vez.: Rudas Anna)

Bizonyos polinomoknak $\mathbb{R}$-ben (a valós számok körében) nincs gyöke, például az x^2+1-nek. Ez azt jelenti, hogy nincs megoldása az $x^2=-1$ egyenletnek. Vezessük azonban be az i szimbólumot, és jelentsük ki róla, hogy $i^2=-1$. Ez önkényesnek tűnhet, de ha definiáljuk a következő halmazt:

$$\mathbb{C}=\{a+bi: \quad a,b\in\mathbb{R}\},$$

(neve: komplex számok halmaza), és a következőkben bemutatott műveleteket bevezetjük rajta, akkor bebizonyítható, hogy ebben a számhalmazban már minden polinomnak van gyöke.

1. Elnevezések

   $z=a+bi$ esetén a neve valós rész (vagy reális rész), $\mathrm{Re}z=a$, b neve pedig képzetes rész (vagy imaginárius rész), $\mathrm{Im}z=b$. Az i szám neve: képzetes (imaginárius) egység.

2. A komplex számsík

   A komplex számok 1-1 értelmű megfeleltetésben állnak tehát az (a,b) valós számpárokkal: ha a síkon a vízszintes tengelyen z reális, függőleges tengelyen pedig z imaginárius részét mérjük fel, akkor egy jól meghatározott pontot kapunk a síkon, mely a z komplex számnak felel meg (és viszont). Megtehetjük, hogy nem is a pontot, hanem az oda mutató helyvektort tekintjük: ezzel tehát 1-1 értelmű megfeleltetésbe hoztuk a komplex számokat a sík helyvektoraival.

   Ennek a megközelítésnek a haszna például (értsd: $z_1=a_1+b_1i$ és $z_2=a_2+b_2i$):

   $$z_1+z_2=a_1+a_2+(b_1+b_2)i,$$

   és tetszőleges $\lambda\in\mathbb{R}$-re

   $$\lambda z=\lambda a+\lambda bi,$$

   tehát a komplex számok összeadása a megfelelő vektorok összeadását, valós számmal való szorzása pedig a vektornak azzal a számmal való megnyújtását jelenti.

   FELADAT: rajzoljuk le a síkon a következő komplex számokat:

   $$1,-1,-\sqrt{2},i,-i,i\sqrt{2},-1+i,2-3i$$

3. Konjugálás

   $z=a+bi$ esetén a z szám konjugáltja, $\bar{z}$ a következő:

   $$\bar{z}=a-bi.$$

   A síkon lerajzolva jól látható, hogy a konjugálás nem más, mint a helyvektor tükrözése a valós tengelyre.

   FELADAT: mivel egyenlők (hogyan írhatók másképp) az alábbi kifejezések:

   $$\overline{z_1+z_2}=$$
   $$\bar{\bar{z}}=$$
   $$z+\overline{z}=$$
   $$z-\bar{z}=$$

4. Abszolút érték

   Egy komplex szám abszolút értékén a neki megfelelő helyvektor hosszát értjük, tehát

   $$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

   FELADAT: állapítsuk meg, hol fekszenek a síkon azok a z komplex számok, melyekre igaz, hogy $|z|\le 2$, illetve amelyekre $|z-i|<1$?

5. Trigonometrikus alak

   Az eddig tanult $z=a+bi$ felírást nevezzük a z szám *algebrai alakjának*. Egy helyvektort azonban nem csak koordinátáival adhatunk meg egyértelműen, hanem azzal is, ha megmondjuk a hosszát (r) és azt a szöget, amivel egy a valós tengely pozitív irányába mutató vektort pozitív irányba elforgatva az adott helyvektor irányába mutató vektort kapunk. Ez a szög (2π egész többszöröseinek hozzáadásától eltekintve) egyértelmű (jele: $\varphi=arcz$). Ezek segítségével írhatjuk, hogy

   $$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

   ez a felírás a z *trigonometrikus alakja.*

   FELADAT: adjuk meg a következő számok trigonometrikus alakját:

   $$1,i,-i,1+i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\sqrt{3}-i$$

6. Exponenciális alak

Ahhoz, hogy az ún. exponenciális alakot is bevezethessük, a következőt kell elfogadnunk: a valós számok körében ismert exponenciális függvény ($x \mapsto e^x$) kiterjesztése komplex számokra legtermészetesebben a következő definícióval tehető meg, ahol $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

(Ez a lépés sajnos nem magyarázható az építész matematika tantárgy körében, mert bizonyos fontos dolgok óhatatlanul kimaradnak a rövid matematikai képzési idő miatt. Akit esetleg érdekel a dolog, megkereshet a fogadóórámon, és magyarázok róla.)

Ha elfogadjuk a fentit, akkor a trigonometrikus alak egyszerű átírásával eljutunk a

$$z = re^{i\varphi}$$

képlethez, ami a z *exponenciális alakja.* Az azért egyből látható, hogy (elfogadva a definíciót) bármilyen $\varphi \in \mathbb{R}$ számra $|e^{i\varphi}| = 1$, hiszen (az abszolútértékes formula alapján) $\sqrt{(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2} = 1$.

7. Komplex számok szorzása

Hogyan szorzunk komplex számokat egymással? Ha az algebari alakkal dolgozunk, akkor azt kapjuk, hogy (felbontva a zárójeleket, és használva, hogy $i^2 = -1$)

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Ez a képlet nem túl látványos. Nézzük azonban, mit ad, ha az exponenciális alakot használjuk:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Ez már sok mindent elárul: két komplex szám szorzatának abszolút értéke a két szám abszolútértékének szorzata, a helyvektor szöge pedig a két szög összege lesz. Ennek megfelelően: komplex számmal való szorzás forgatva nyújtást jelent.

FELADAT: mi egy komplex számnak a saját konjugáltjával való szorzata?

$$z\bar{z} =$$

ÉRDEKESSÉG: a sin és cos függvényekre vonatkozó addíciós tételek meglepően könnyen látszanak, ha a fenti, algebrai alakban írt szorzatképlet alapján felírjuk, hogy

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = Re(z_1 z_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2.$$

(Ugyanígy sin-ra is.)

8. Komplex számok osztása

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Ha a számok algebrai alakjukban adottak, akkor vagy átírjuk őket exponenciális alakba és a fenti képletet használjuk, vagy pedig a következőképp járunk el: bővítjük a törtet a nevező konjugáltjával (az iménti feladatban láttuk, hogy ekkor a nevező tisztán valós lesz). Lássuk ezt egy pár példán:

FELADAT: számoljuk ki a következő törtek értékét:

$$\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{1+2i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{-5+10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$\frac{a+bi}{a-bi} = \frac{a+bi}{a-bi} \cdot \frac{a+bi}{a+bi} = \frac{a^2 - b^2 + 2abi}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

FELADAT: (az előző példa másképp) Mennyi egy számnak a saját konjugáltjával való hányadosa? Használjuk az exponenciális alakot, majd a kapott eredményt rajzoljuk is le a síkon.

$$\frac{z}{\bar{z}} =$$

9. Hatványozás

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

esetén

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

tehát megállapíthatjuk, hogy a hatványozás során mindig az adott φ szöggel forog pozitív irányba a vektor, hossza pedig valós számként hatványozódik.

FELADAT: Mennyi i^{2004} értéke?

FELADAT: Számoljuk ki $(1+i)^{52}$ illetve $(1-\sqrt{3}i)^6$ értékét!

10. Gyökvonás

A valós számok körében $\sqrt{4} = 2$ volt igaz, pedig a -2 szám négyzete is 4. Ezt a hátrányos megkülönböztetést oldjuk fel azzal, hogy a komplex számok körében a gyökvonást nem egyértelmű műveletként definiáljuk. Említettük, hogy egy helyvektorhoz tartozó szög nem egyértelmű, hiszen $2k\pi$-vel többel elforgatva is ugyanazt a vektort kapjuk: ezt fogjuk most használni (k mindig egész számot jelöl). Valójában tehát

$$z = re^{i(\varphi+2k\pi)},$$

és így

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n})}.$$

Ezt a legjobban egy pár példán keresztül érthetjük meg:

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}} = e^{i(\frac{\pi}{4}+k\pi)},$$

azaz nem csak egy, hanem két olyan szám is van, aminek a négyzete i. (Rajzoljuk fel ezt a síkon, és máris világossá válik.)

FELADAT: Számítsuk ki $\sqrt[5]{1+\sqrt{3}}$ öt különböző értékét!