A] 1) Nézzük az absz. konvergenciát!

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{k^2+5}$$ Mivel $\frac{k+3}{k^2+5} \geq \frac{k}{k^2+5k^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{k}$

minoráns krit. $\Leftarrow$ $\sum \frac{1}{k}$ sor div.

Ez a sor divergens.

(Az eredeti sor nem absz. konv.)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+3}{k^2+5}$$ Leibniz-sor-e?

Váltakozó előjelű? OK

$\frac{k+3}{k^2+5} \to 0, \quad k \to \infty$ OK

Monoton csökkenő-e?

$$\frac{k+3}{k^2+5} \overset{?}{\geq} \frac{k+1+3}{(k+1)^2+5} = \frac{k+4}{k^2+2k+6}$$

$$\cancel{k^3}+2k^2+6k+3k^2+6k+18 \overset{?}{\geq} \cancel{k^3}+4k^2+5k+20$$

$$k^2+7k-2 \overset{?}{\geq} 0$$ Valamilyen k-tól már mon. csökkenő

$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2-4 \cdot 1(-2)}}{2}$$ $k_2 < 0$

$k_1 = \frac{-7+\sqrt{57}}{2} \leq \frac{-7+8}{2} = \frac{1}{2}$

$k=1$-től már mon. csökkenő

Tehát Leibniz-sorról van szó.

Így a sor feltételesen konvergens.

2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1^k + 3^k x}{2^k \cdot 3^k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{6}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot x \right) = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} x =$

$= \frac{6}{5} + 2x \Rightarrow$ A bal oldal tehát $+2$

$\left(\frac{1^k + 3^k x}{2^k \cdot 3^k} \right)' = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

A jobb oldal tehát: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$

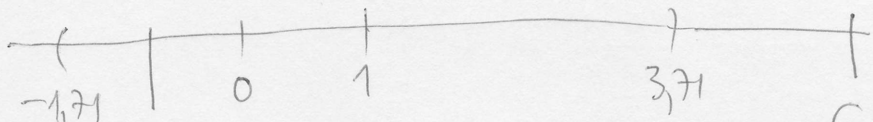
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1^k + 3^k x}{\cdot 2^k \cdot 3^k}$ fv-sor konvergens és a derivált sor

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ egyenletesen konv. $\Rightarrow$ a deriválás és a $\sum$ felcserélhető

3) Hányadoskritériummal:

$$\frac{\frac{(k-1)!}{k^k}}{\frac{k!}{(k+1)^{k+1}}} = \frac{(k+1)^{k+1}}{k \cdot k^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right) \to \underline{\underline{e = R}}$$

$(1-e, 1+e) \subset KT$



$-1 \in KT$ a) sor konv.

b) sor div.

$6 \notin KT$

4) $\frac{1}{(e^{x^2})^{1/3}} = e^{-\frac{x^2}{3}}$ e^x sorát használjuk $R=\infty$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{3}\right)^k}{k!} \qquad \underline{\underline{R=\infty}}$$

$$= \dots + \frac{\left(-\frac{x^2}{3}\right)^5}{5!} + \dots$$

Így $\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = \frac{-1}{3^5 \cdot 5!}$ $\qquad \frac{-1}{3^5 \cdot 5!} x^{10}$

azaz. $f^{(10)}(0) = \underline{\underline{\frac{-10!}{3^5 \cdot 5!}}}$ $\qquad T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{3}$

(Taylor – sorból)

5)

A) $x=0$ esetén -1
$y=0$ esetén $\frac{1}{2}$ } az érték $\Rightarrow$ nincs határérték

B) $$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\sin(\varrho\cos\varphi\,\varrho\sin\varphi)\cdot \varrho^{\cancel{3}}\cos^3\varphi}{\cancel{\varrho^2}} = 0$$

(korlátos $\cdot$ ϱ alakú)

B) Nézzük az absz. konvergenciát!

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+4} \qquad \frac{k+2}{k^2+4} \geq \frac{k}{k^2+4k^2} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{k}$$

Minoráns krit. $\qquad \sum \frac{1}{k}$ divergens

A sor is divergens

(Azaz az eredeti sor nem absz. konv.)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+2}{k^2+4}$$ Leibniz-sor-e?

Váltakozó előjelű OK

$$\frac{k+2}{k^2+4} \to 0 \quad (k\to\infty)$$

Monoton csökkenés:

$$\frac{k+2}{k^2+4} \overset{?}{\geq} \frac{k+3}{(k+1)^2+4} = \frac{k+3}{k^2+2k+5}$$

$$\cancel{k^3}+2k^2+5k+2k^2+4k+10 \overset{?}{\geq} \cancel{k^3}+3k^2+4k+12$$

$$k^2+5k-2 \geq 0$$ Valamilyen k-tól biztosan, de nézzük pontosan.

$$k_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{25-4(-2)}}{2} = \frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$$

$k_1 < 0$

$k_2 < \frac{-5+6}{2} = \frac{1}{2}$, azaz $k=1$-től már monoton csökk.

Így Leibniz-sor,

azaz összefoglalva: a sor feltételesen konvergens

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k + 4^k \cdot x}{3^k \cdot 4^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^k + \frac{1}{3^k} \cdot x =$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{12}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} x = \frac{12}{11} + \frac{3}{2} x$$

, melynek deriváltja $\frac{3}{2}$

Ez a bal oldal.

Jobb oldal:

$$\left(\frac{1^k + 4^k x}{3^k \cdot 4^k}\right)' = \frac{1}{3^k} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

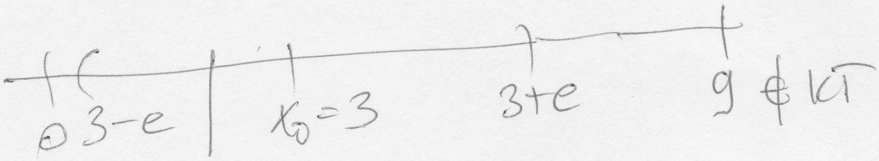
Megegyeznek.

Mivel $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k + 4^k x}{3^k \cdot 4^k}$ konv. és $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1^k + 4^k x}{3^k \cdot 4^k}\right)' =$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ egyenletesen konv., így a deriválás és a Σ felcserélhető.

3)

$$\frac{\frac{k!}{k^k}}{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1) \cdot k^k} = \frac{(k+1)^k}{k^k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \to e = R$$



$x = 2 \in KT$

az a) sor konv.

a b) sor divergens

4) $f(x) = \dfrac{1}{(e^{x^2})^{1/2}} = \dfrac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$ e^x sora alapján

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!} \quad \text{és } R = \infty$$

$k=6$-os tag $\dfrac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^6}{6!} = \overbrace{\dfrac{1}{2^6 \cdot 6!}}^{\frac{f^{(12)}(0)}{12!}} x^{12}$, így

$$f^{(12)}(0) = \frac{12!}{2^6 \cdot 6!}$$

$T_2(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$ (Taylor-sorból)

5)

A) $\lim\limits_{\varrho \to 0} \dfrac{\cos(3\varrho\cos\varphi \cdot \varrho\sin\varphi) \cdot \varrho^{\cancel{3}} \sin^3\varphi}{\cancel{\varrho^2}} = 0$

$\varrho \to 0$, a többi korlátos

B) $x = 0$ esetén -1, $y = 0$ esetén 3 a fv értéke, így nem lehet határérték az origóban.