A]

1) „A" sor nem konv., mert tagjai nem tartanak nullához.

a) „B" sor váltakozó előjelű

$$\frac{2k}{k^2+1} \to 0 \quad (k\to\infty)$$

Monoton csökkenő

$$\frac{2k}{k^2+1} \overset{?}{\geq} \frac{2(k+1)}{(k+1)^2+1} = \frac{2k+2}{k^2+2k+2}$$

$$\cancel{2k^3}+4k^2+4k \overset{?}{\geq} \cancel{2k^3}+2k^2+2k+2$$

$$2k^2+2k-2 \overset{?}{\geq} 0$$

$$k^2+k-1 \overset{?}{\geq} 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Így $k \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ esetén, azaz már $k=2$-től is teljesül a monoton csökkenés.

Leibniz, azaz konvergens

b) A hibát az 50. taggal becsülhetjük:

$$|S_{49}-S| \leq \frac{2\cdot 50}{50^2+1} = \frac{100}{2501}$$

2)

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(5^k x)}{4^k}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$ $\left|\frac{\cos(5^k x)}{4^k}\right| \leq \frac{1}{4^k}$ és $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{4^k}$

$$\underbrace{\text{konvergens sor (végtelen mértani sor } q=1/4\text{-del)}}$$

$\Downarrow$ Weierstrass

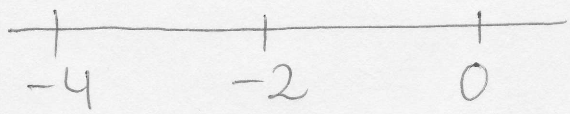
egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en.

b) Az egyenletes konv. miatt

$$\lim_{x\to 0} S(x) = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos(5^k x)}{4^k}\right) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{4^k} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

3) $x_0 = -2$

$$\frac{1}{\sqrt[k]{\left|\frac{1}{k^2 \cdot 2^k}\right|}} = \sqrt[k]{k^2} \cdot 2 \to 2 = R \qquad \text{gyökkritériummal}$$



$\downarrow$

$x = -4$ eset

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k^2 \cdot 2^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

absz. konv.

$\hookrightarrow$ $x = 0$ eset

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{k^2 \cdot 2^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{absz. konv.}$$

Tehát $KT = [-4, 0]$

Absz. konv. tart. $= [-4, 0]$

4)
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x^2}} = (8-x^2)^{-1/3} = \left(8\left(1 + \frac{-x^2}{8}\right)\right)^{-1/3} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{-x^2}{8}\right)^{-1/3} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/3}{k} \left(\frac{-x^2}{8}\right)^k$$

$\uparrow$ Binomiális-sor

$$\left|-\frac{x^2}{8}\right| < 1 \Rightarrow x^2 < 8 \Rightarrow \underline{R = \sqrt{8}}$$

$$f(x) = \ldots + \underbrace{\frac{1}{2} \binom{-1/3}{2} \cdot \frac{(-1)^2}{8^2}}_{} \cdot x^4 + \ldots$$

$$f^{(4)}(0) = 4! \cdot \frac{1}{2 \cdot 64} \binom{-1/3}{2} = \frac{24}{2 \cdot 64} \cdot \frac{(-1/3) \cdot (-4/3)}{2} = \frac{24 \cdot \cancel{4}}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 64 \cdot 9} = \underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-1/3}{k} \cdot \left(\frac{-x^2}{8}\right)^{k-1} \cdot k \cdot \frac{-x}{4} \qquad \text{tagonként lehet számolni}$$

5) a) $\frac{2xy^2}{x^2+y^4}$

$\underset{\sim}{y=x}$ $\frac{2xx^2}{x^2+x^4}=\frac{2x}{1+x^2}\to 0$ $(x\to 0)$

$\underset{\sim}{y=0}$ $\frac{2x0^2}{x^2+0^4}=0\to 0$ $(x\to 0)$

$\underset{\sim}{y^2=x}$ $\frac{2y^4}{y^4+y^4}=1\to 1$ $\begin{pmatrix}x\to 0\\ y\to 0\end{pmatrix}$

Így nincs a fv-nek határértéke az origóban.

b) $\frac{2xy^2}{x^2+y^2}$

$\underset{\sim}{y=x}$ $\frac{2xx^2}{x^2+x^2}=\frac{2x^3}{2x^2}=x\to 0$

$\underset{\sim}{y=0}$ 0

$\underset{\sim}{y^2=x}$ $\frac{2y^2\cdot y^2}{y^4+y^2}=\frac{2y^2}{y^2+1}\to 0$ $y\to 0$

Ettől még lehet határérték.
Nézzük máshogy:

$x=\varrho\cdot\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$

$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{2\cdot\varrho\cos\varphi\cdot\varrho^2\cdot\sin^2\varphi}{\varrho^2}=\lim_{\varrho\to 0}\underbrace{2\varrho}_{\downarrow\, 0}\cdot\underbrace{\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi}_{\text{korl.}}=0$$

Így $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy^2}{x^2+y^2}=0$

B

A) Váltakozó előjelű

1) $\frac{3k}{k^2+2} \to 0 \quad k\to\infty$

a) Monoton csökkenés:

$$\frac{3k}{k^2+2} \overset{?}{\geq} \frac{3(k+1)}{(k+1)^2+2} = \frac{3k+3}{k^2+2k+3}$$

$$\cancel{3k^3}+6k^2+9k \overset{?}{\geq} \cancel{3k^3}+3k^2+6k+6$$

$$3k^2+3k-6 \overset{?}{\geq} 0$$

$$k^2+k-2 \overset{?}{\geq} 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$k \geq 1$-től már mon. cs.

Leibniz $\Downarrow$ konvergens

B) $(-1)^k \frac{3k}{k+2} \not\to 0$, sőt nem is konvergens.

$\Rightarrow$ Nincs összeg, nem konvergens

b)

$$|S_{99}-S| \leq |a_{100}| = \frac{3\cdot 100}{100^2+2} = \frac{300}{10002}$$

2)

a) $S(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos(4^k x)}{3^k}$ $\quad \left|\frac{\cos(4^k x)}{3^k}\right| \overset{\forall x}{\leq} \frac{1}{3^k} \quad \sum \frac{1}{3^k}$ konv (mértani sor)

Weierstass $\Downarrow$

A függvénysor egyenletesen konv.

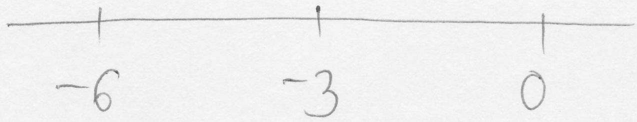
b) $$\lim_{x\to 0} S(x) = \sum_{k=3}^{\infty}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos(4^k x)}{3^k}\right) = \sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} =$$

Egyenletes konvergencia miatt

$$= \frac{1}{27}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{18}$$

3) $x_0 = -3$

$$\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{k^3 3^k}}} = \sqrt[k]{k} \cdot 3 \to \underline{\underline{3 = R}}$$



$\downarrow$ $x = -6$ eset

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k^3 \cdot 3^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3}$$

abszt. konv.

$\hookrightarrow$ $x = 0$ eset

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cancel{3^k}}{k^3 \cdot \cancel{3^k}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3} \text{ absz. konv.}$$

Tehát $KT = [-6, 0]$

Abszolút konv. tart. $= [-6, 0]$

4) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16 - x^2}} = (16 - x^2)^{-1/4} = \left(16\left(1 + \frac{-x^2}{16}\right)\right)^{-1/4} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{-x^2}{16}\right)^{-1/4} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/4}{k} \cdot \left(\frac{-x^2}{16}\right)^k$$

Binomiális sor

$$\left|-\frac{x^2}{16}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 4 \Rightarrow \underline{\underline{R = 4}}$$

$$f(x) = \ldots + \underbrace{\frac{1}{2}\binom{-1/4}{2} \cdot \frac{1}{16^2}}\, x^4 + \ldots$$

$$f^{(4)}(0) = 4! \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1/4)(-5/4)}{2} \cdot \frac{1}{16^2} = \frac{\cancel{24}^{\,6}}{\cancel{4} \cdot 16^2} \cdot \frac{5}{16} = \frac{30}{16^3}$$

Tagonkénti deriválással:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-1/4}{k} \cdot k \left(\frac{-x^2}{16}\right)^{k-1} \cdot \frac{-x}{8}$$

5) a) $\frac{3xy^3}{x^2+y^6}$

$\underset{\sim}{y=x}$ $\quad \frac{3xx^3}{x^2+x^6} = \frac{3x^2}{1+x^4} \to 0 \quad x \to 0$

$\underset{\sim}{y=0}$ $\quad 0$

$\underset{\sim}{y^3=x}$ $\quad \frac{3y^3 \cdot y^3}{y^6+y^6} = \frac{3y^6}{2y^6} = \frac{3}{2} \to \frac{3}{2}$

Nincs határérték, mert 2 kül. görbén más-más határértéket kaptunk.

b) $\frac{3xy^3}{x^2+y^2}$

$\underset{\sim}{y=x}$ $\quad \frac{3xx^3}{x^2+x^2} = \frac{3x^4}{2x^2} = \frac{3}{2}x^2 \to 0$

$\underset{\sim}{y=0}$ $\quad 0$

$\underset{\sim}{y^3=x}$ $\quad \frac{3y^3 \cdot y^3}{y^6+y^2} = \frac{3y^4}{y^4+1} \to 0 \quad y \to 0$

0 lehet a határérték

Lássuk be!

$x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{3 \cdot \rho \cos\varphi \cdot \rho^3 \sin^3\varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho \to 0} \underbrace{3\rho^2}_{\to 0} \underbrace{\cos\varphi \cdot \sin^3\varphi}_{\text{korl.}} = 0$$

Tehát $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^3}{x^2+y^2} = 0$$