# Differenciálszámítás

**Lokális növekedés (illetve csökkenés):** Ha az $f(x)$ függvény deriváltja az $x_0$ helyen pozitív: $f'(x) > 0$ (illetve negatív: $f'(x) < 0$), akkor az $f(x)$ függvény az $x_0$ helyen növekvően (illetve csökkenően) halad át.
Ha $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumon differenciálható függvény és az intervallum minden pontjában teljesül, hogy

$$
\begin{aligned}
&f'(x) > 0, \text{ akkor } f(x) \textit{ szigorúan monoton növekvő};\\
&f'(x) \geq 0, \text{ akkor } f(x) \textit{ monoton növekvő};\\
&f'(x) < 0, \text{ akkor } f(x) \textit{ szigorúan monoton csökkenő};\\
&f'(x) \leq 0, \text{ akkor } f(x) \textit{ monoton csökkenő}.
\end{aligned}
$$

**Lokális szélsőérték:** Az $f(x)$ függvénynek az $x_0$ helyen *lokális szélsőértéke* van, ha $f'(x_0) = 0$, de $f''(x_0) \neq 0$ (illetve ha a magasabb rendű deriváltak eltűnnek, akkor az első el nem tűnő derivált páros rendű: $f^{(2n)}(x_0) \neq 0$).
*Lokális maximum* esetén $f'(x_0) = 0$, de $f''(x_0) < 0$ (illetve $f^{(2n)}(x_0) < 0$).
*Lokális minimum* esetén $f'(x_0) = 0$, de $f''(x_0) > 0$ (illetve $f^{(2n)}(x_0) > 0$).

**Inflexiós pont:** Az $f(x)$ függvénynek az $x_0$ helyen *inflexiós pontja* van, ha $f''(x_0) = 0$, de $f'''(x_0) \neq 0$ (illetve ha a magasabb rendű deriváltak eltűnnek, akkor az első el nem tűnő derivált páratlan rendű: $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$); ekkor ugyanis $f''(x)$ az $x_0$ helyen előjelet vált.

**Konvexitás, konkávitás:**
Az $f(x)$ függvény *alulról konvex*, ha $f'(x)$ monoton növekszik, azaz ha $f'(x) \geq 0$.
Az $f(x)$ függvény *alulról konkáv*, ha $f'(x)$ monoton csökken, azaz ha $f'(x) \leq 0$.

**Görbület:** Az $f(x)$ függvény görbülete:

$$\frac{1}{r} = \frac{f''(x)}{\left\{1 + [f'(x)]^2\right\}^{3/2}}$$

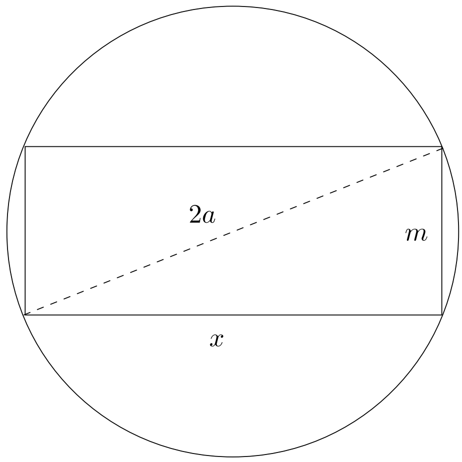
Paraméteres megadás esetén:

$$\frac{1}{r} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2\}^{3/2}}$$

## Szöveges szélsőérték-számítási példák:

1) Határozzuk meg az $a$ sugarú körbe írt legnagyobb területű derékszögű négyszöget (téglalapot)!

*Megoldás:*




Jelölje a téglalap két szomszédos oldalát $x$ és $m$. Ekkor a téglalap területe: $T = xm$. A téglalap átlója éppen a kör átmérőjével ($2a$) egyezik meg, így a Pitagorasz-tétel értelmében $x^2+m^2 = 4a^2$. Innen $m^2 = 4a^2-x^2$, amiből $m$-et kifejezve és a terület képletébe beírva a területnek csak $x$-től függő képletét kapjuk: $T(x) = x\sqrt{4a^2 - x^2}$. A terület maximumát keresve lederiváljuk azt:

$$\frac{dT(x)}{dx} = \sqrt{4a^2 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{4a^2 - x^2}}$$

Szélsőérték ott lehet, ahol a derivált nulla:

$$\sqrt{4a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}} = 0$$

$$\frac{4a^2 - x^2 - x^2}{2\sqrt{4a^2 - x^2}} = 0$$

$$4a^2 = 2x^2$$

$$x = \pm\sqrt{2}a$$

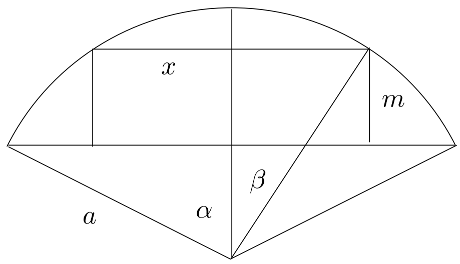
Mivel $x$ a téglalap egyik oldala, így csak a pozitív megoldás lehetséges: $x = \sqrt{2}a$, ahol *lehetséges*, hogy szélsőértéke van a $T(x)$ függvénynek. Ezt a második deriváltból láthatjuk:

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = \frac{-2x}{2\sqrt{4a^2-x^2}} - \frac{2x\sqrt{4a^2-x^2}+\frac{2x^3}{2\sqrt{4a^2-x^2}}}{4a^2-x^2}$$

Közös nevezőre hozva láthatjuk, hogy a nevező mindig pozitív: $4a^2 - x^2 = = m^2 > 0$, a számláló pedig negatív, így $\frac{d^2T(x)}{dx^2}$ mindig negatív, tehát valóban szélsőérték van, ami maximum.

2) Határozzuk meg az $a$ sugarú kör szeletébe írt legnagyobb területű derékszögű négyszöget, ha a szelethez tartozó középponti szög $2\alpha$!

*Megoldás:*




$$\begin{aligned} m &= a\cos\beta - a\cos\alpha = a(\cos\beta-\cos\alpha) \\ x &= a\sin\beta \\ T &= 2xm = 2a^2\sin\beta(\cos\beta-\cos\alpha) \\ \frac{dT}{d\beta} &= 2a^2[\cos\beta(\cos\beta-\cos\alpha) - \sin\beta\sin\beta] = 2a^2(\cos^2\beta - \sin^2\beta - \cos\alpha\cos\beta) \end{aligned}$$

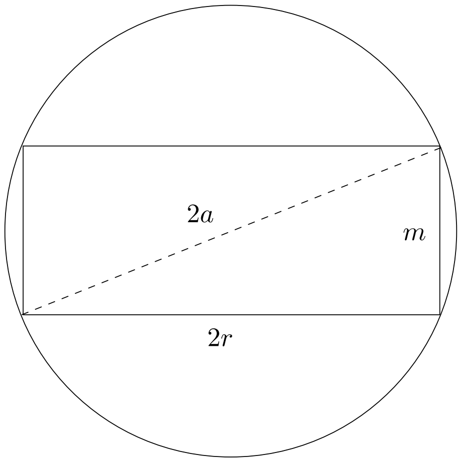
$$\cos^2\beta - \sin^2\beta - \cos\alpha\cos\beta = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\cos^2\beta - \cos\alpha\cos\beta = 1$$

$$\cos\beta = \frac{\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha+8}}{4}$$

Csak a + előjelnek van értelme, továbbá a geometriai viszonyokból látszik, hogy maximum lép fel.

3) Határozzuk meg az $a$ sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú hengert!

*Megoldás:* A gömb meridiánmetszete:




$$4r^2 + m^2 = 4a^2$$
$$m = 2\sqrt{a^2 - r^2}$$
$$r^2 = \frac{4a^2 - m^2}{4}$$

$$V = r^2 \pi m$$
$$V(r) = 2r^2 \pi \sqrt{a^2 - r^2}$$
$$V(m) = \frac{4a^2 - m^2}{4} \pi m = a^2 \pi m - \frac{m^3}{4} \pi$$

(A $V(m)$ előállítás azért előnyősebb, mint a $V(r)$, mert könnyebb lesz deriválni.)

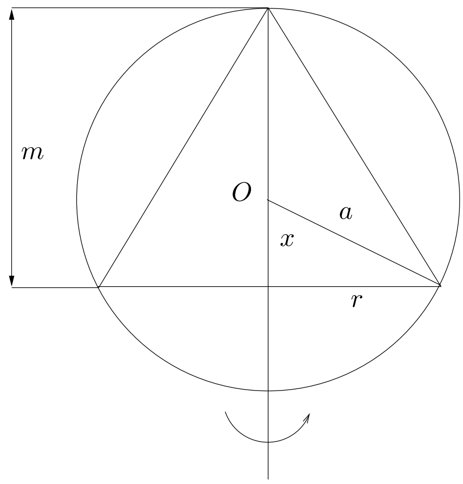
$$\frac{dV(m)}{dm} = a^2\pi - \frac{3m^2}{4}\pi = 0 \quad \Longrightarrow \quad m^2 = \frac{4a^2}{3} \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{2a}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad r = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

A második derivált: $\dfrac{d^2V(m)}{dm^2} = -\dfrac{6m}{4} < 0$, tehát valóban maximum lép fel. Ekkor

$$V_{\max} = \frac{2}{3} a^2 \pi \frac{2a}{\sqrt{3}} = a^3 \pi \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

4) Határozzuk meg az $a$ sugarú gömbbe írt legmagyobb térfogatú forgáskúpot!

*Megoldás:*




$$r^2 = a^2 - x^2$$
$$m = a + x$$
$$v = r^2 \pi \frac{m}{3}$$

$$V(x) = \left(a^2 - x^2\right) \pi \frac{a+x}{3} = \frac{\pi}{3}\left(-x^3 - ax^2 + a^2x + a^3\right)$$
$$V'(x) = \frac{\pi}{3}\left(-3x^2 - 2ax + a^2\right) = 0$$

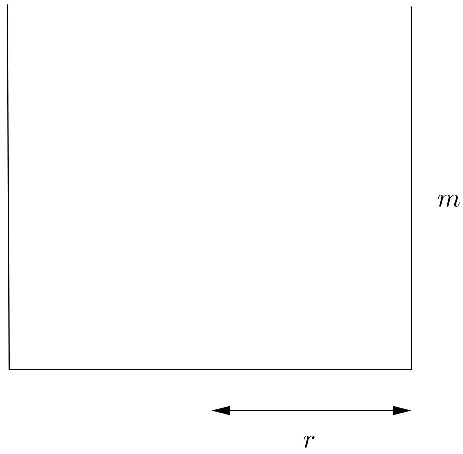
$$x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 12a^2}}{-6} = \begin{cases} -a & \text{ez nem jó megoldás a geometriai jelentés miatt} \\ \frac{1}{3}a \end{cases}$$
$$\Longrightarrow m = \frac{4}{3}a \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt{a^2 - \frac{1}{9}a^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

A második derivált: $V''(x) = \pi/3(-6x - 2a) = -4a\pi/3 < 0$, tehát valóban maximum lép fel ennél az $x$ értéknél. Ekkor

$$V_{\max} = \frac{8}{9}a^2 \pi \frac{4a}{9} = \frac{32}{81}\pi a^2.$$

5) Határozzuk meg az 1 literes, felül nyitott legkisebb felszínű hengert!

*Megoldás:*

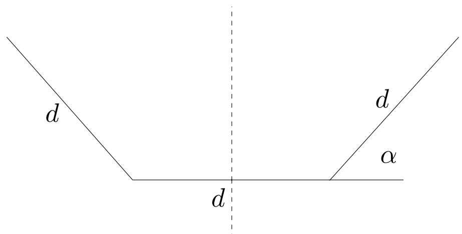



$$
\begin{aligned}
V &= r^2\pi m = 1\ \mathrm{dm}^3 \quad\Longrightarrow\quad m = \frac{1}{r^2\pi}\\
F &= 2r\pi m + r^2\pi\\
F(r) &= \frac{2}{r} + r^2\pi\\
F'(r) &= -\frac{2}{r^2} + 2r\pi = 0 \quad\Longrightarrow\quad r = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \quad\Longrightarrow\quad m = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}
\end{aligned}
$$

A második derivált: $F''(r) = \frac{4r}{r^4} + 2\pi = 6\pi > 0$, tehát valóban minimum lép fel ezen az $r$ helyen. Ekkor $F_{\min} = 3\sqrt[3]{\pi}$.

6) Egyenlő szélességű deszkákból csatornát készítünk. Az oldalfalak milyen hajlásszöge mellett lesz a csatorna keresztmetszete maximális?

*Megoldás:*



A keresztmetszet területe:

$$T(\alpha) = 2\frac{d/2 + d/2 + d\cos\alpha}{2} d\sin\alpha = d^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha$$

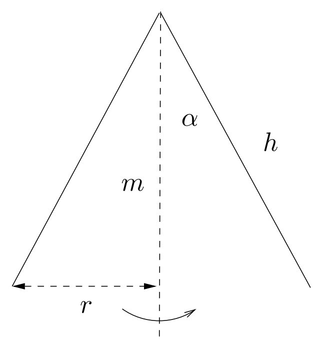
$$T'(\alpha) = d^2(\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = d^2(\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1) = 0$$

$$\cos\alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \quad \text{ez nem lehet megoldás.} \end{cases}$$

Tehát $\alpha = 60°$. Ennél az értéknél a második derivált: $T''(\alpha) = d^2(-\sin\alpha - - 4\cos\alpha\sin\alpha) < 0$, tehát valóban maximum lép fel.

7) Határozzuk meg a adott $h$ alkotójú legnagyobb térfogatú kúpot!

*Megoldás:*




$$r = h\sin\alpha, \quad m = h\cos\alpha$$

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}r^2\pi m = \frac{\pi}{3}h^3\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$V'(\alpha) = \frac{\pi}{3}h^3(2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha) = \frac{\pi}{3}h^3\sin\alpha(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$$

$$2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 2 - 3\sin^2\alpha = 0$$

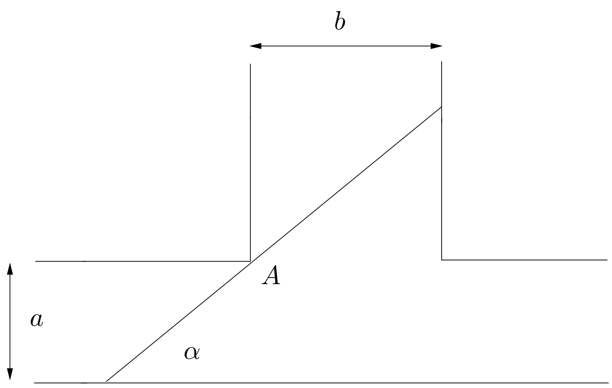
$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

A második derivált: $V''(\alpha) = \frac{\pi}{3}h^3(-6\sin\alpha\cos\alpha) < 0$, tehát valóban maximum lép fel. Ekkor

$$r = h\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad m = h\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \Longrightarrow \quad V_{\max} = \frac{\pi}{3}h^3\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}h^3$$

8) Egy $a$ szélességű csatornából derékszögben kinyúlik egy $h$ szélességű csatorna. A csatornák falaiegyenes vonalúak. Határozzuk meg azon gerenda legnagyobb hosszát, amely az egyik csatornából átúsztatható a másik csatornába!

*Megoldás:*




Keressük az $\alpha$ szöget, amelynél $A$ pontban illeszkedő egyenes szakasz hossza a legkisebb. Ez a leghosszabb átúsztatható gerenda hosszát adja.

$$l(\alpha) = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha}$$

$$l'(\alpha) = -\frac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{b\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{-a\cos^3\alpha + b\sin^3\alpha}{(\sin\alpha\cos\alpha)^2} = 0$$

$$-a\cos^3\alpha + b\sin^3\alpha = 0$$

$$\mathrm{tg}^3\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

Minthogy

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha \quad \text{és} \quad \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha$$

így

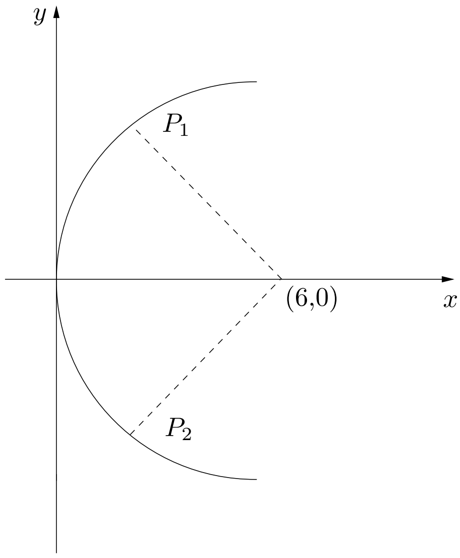
$$\frac{b}{\cos\alpha} = b\sqrt{1 + \frac{a^{2/3}}{b^{2/3}}} = b^{2/3}\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}} \quad \text{és} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = a\sqrt{1 + \frac{a^{2/3}}{b^{2/3}}} = a^{2/3}\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}$$

Ebből:

$$l_{\max} = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha} = a^{2/3}\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}} + b^{2/3}\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}} =$$
$$= (a^{2/3}+b^{2/3})\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}} = (a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$$

9) Keressük meg az $y^2 = 8x$ parabolának azt a pontját, amely a (6,0) ponttól a legkisebb távolságra van!

*Megoldás:*




$$f(x) = d^2 = (6-x)^2 + 8x$$
$$f(x) = 36 - 12x + x^2 + 8x = x^2 - 4x + 36$$
$$f'(x) = 2x - 4 = 0$$
$$x = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

A második derivált: $f''(x) = 2 > 0$, tehát minden esetben minimum adódik. Tehát a két keresett pont: $P_1(2{,}4)$ és $P_2(2,-4)$.

10) Feltételezve, hogy a motoros hajó energiafogyasztása a sebesség harmadik hatványával egyenesen arányos, keressük meg a leggazdaságosabb óránkénti sebességet abban az esetben, amikor a hajó $c$ km/óra sebességű vízsodrással

szemben halad!

*Megoldás:* Egy óra alatt a hajó $v - c$ km utat tesz meg felfelé. Ezalatt az energiafogyasztása $E = av^3$, ahol $a$ =konstans arányossági tényező. A költséget az 1 km megtételéhez felhasznált energiával mérhetjük. A leggazdaságosabb a hajózás akkor, ha az 1 km út felfelé való megtételéhez a legkevesebb energia szükséges. Ezek szerint a leggazdaságosabb sebességet a

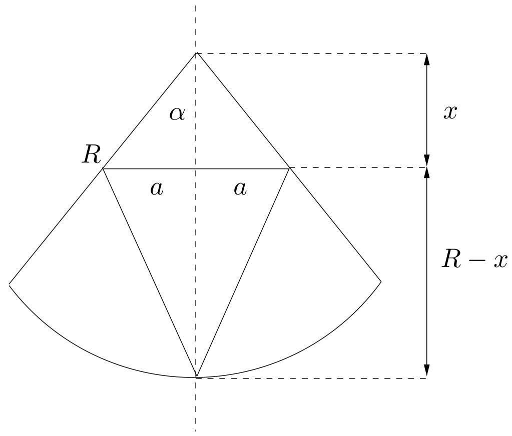
$$K = a\frac{v^3}{v-c}$$

költségfüggvény minimumát adó $v$ sebesség szolgáltatja.

$$K'(v) = a\frac{3v^2(v-c) - v^3}{(v-c)^2} = 0$$

$$v^2(3v - 3c - v) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{3}{2}c \text{ km/óra.}$$

11) Rajzoljunk egy $2\alpha$ nyílásszögű körcikkbe egyenlőszárú háromszöget az ábrán látható helyzetben. Mekkorának válasszuk a háromszög alapját, hogy területe maximális legyen?




*Megoldás:*

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{x} = \mathrm{tg}\alpha \quad \Longrightarrow \quad a = x\mathrm{tg}\alpha \\
&T(x) = a(R-x) = x\mathrm{tg}\alpha(R-x) \\
&T'(x) = \mathrm{tg}\alpha(R-x-x) = \mathrm{tg}\alpha(R-2x) = 0 \\
&x = \frac{R}{2} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{R}{2}\mathrm{tg}\alpha
\end{aligned}
$$

A második derivált: $T''(x) = -2\mathrm{tg}\alpha < 0$, tehát valóban maximum lép fel. Ekkor

$$T_{\max} = \frac{R}{2}\mathrm{tg}\alpha\frac{R}{2} = \frac{R^2}{4}\mathrm{tg}\alpha.$$

12) Valamely mennyiséget $n$-szer megmérünk. A mérési eredmények: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A mennyiség valódi értékének tekintjük azt az $x$ számot, amelytől a mérési eltérések négyzetösszege a legkisebb, azaz $A = (x-x_1)^2 + (x-x_2)^2 + \cdots + (x-x_n)^2$ minimális. Írjuk fel ezt a számot!

*Megoldás:*

$$
\begin{aligned}
&\frac{dA}{dx} = 2(x-x_1) + 2(x-x_2) + \cdots + 2(x-x_n) = 0 \\
&2\left[nx - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\right] = 0 \\
&x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}
\end{aligned}
$$

A második derivált: $\dfrac{d^2A}{dx^2} = 2n > 0$, tehát valóban minimum lép fel ennél az értéknél.