12. Határozatlan integrál (megoldások)

1. $\frac{7}{5}x^5 + C.$

2. $\int \sqrt[5]{x}\,dx = \int x^{1/5}\,dx = \frac{5}{6}x^{6/5} + C.$

3. $\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t + C.$

4. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C.$

5. $\int x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{8}}\,dx = \int x^{\frac{7}{8}}\,dx = \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + C.$

6. $2e^x + 5\ln|x| + \operatorname{tg} x + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+4}{x}\,dx = \int \left(x - 3 + \frac{4}{x}\right) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4\ln|x| + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+5} = \int \left(x^2 - 5x + 25 - \frac{125}{x+5}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 25x-$
$- 125\ln|x+5| + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx = \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right) dx = -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$

10. $\dfrac{x^2}{2} - \sqrt{2}x + C.$

11. $\dfrac{x^3}{3} - a^2x + a^3\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C.$ (**P 12.7**)

12. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}a^3\ln\left|x^3 - a^3\right| + C.$

13. $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C.$

14. $\dfrac{1}{202}(2x-3)^{101} + C.$

15. $-\dfrac{1}{4(2+3x^2)^2} + C.$

16. $-\dfrac{1}{2(1+x^2)} + C.$

17. $\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27} + C.$

18. $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\cdot\frac{(1-3x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4} + C.$

19. $\dfrac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C$, ha $b \neq 0$, $n \neq -1$; $\dfrac{\ln|a+bx|}{b} + C$, ha $b \neq 0$, $n = -1$; $a^n x + c$, ha $b = 0$.

20. $\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{(1+r^3)^4} + C.$

21. $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2} + C.$

22. $-\sqrt{1-x^2} + C.$

23. $\dfrac{1}{4}\sin^4 x + C.$

24. $\cos^3 x\,dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)\cos x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

25. $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$

26. $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$

27. $\dfrac{\sin^3 x}{3} - \dfrac{\sin^5 x}{5} + C.$

28. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^4 x}\cdot(-\sin x) = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$

29. $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x)}\,dx =$
$\int (\sin x + \sin x \cos x)\,dx = -\cos x + \frac{\sin^2 x}{2} + C.$

30. $\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$

31. $\frac{3}{2}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x} + C.$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x \cos^4 x}} = \int (\operatorname{tg} x)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ átalakítással az eredmény: $2\cdot\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$

33. $\frac{1}{3}\ln^3 x + C.$

34. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x} + C.$

35. $\frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + C.$

36. $\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh} x + C.$

37. $\int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1}\,dx = \sqrt{2}\int \operatorname{ch}\frac{x}{2}\,dx = 2\sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{x}{2} + C.$

38. $\frac{7}{4}\ln|4x-1| + C.$

39. $\ln(4x^2 - 7x + 11) + C.$

40. $\ln(x^2 + 3x - 10) + C.$

41. $-\ln\left|2x^2 - 3x + 1\right| + C.$

42. $\ln\sqrt{x^2 + a^2} + C.$

43. $\ln(a^3 + x^3) + C.$

44. Az $\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$, vagy az $\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$ azonosság alkalmazásával az eredmény: $\ln|\operatorname{tg} x| + C.$

45. Az előző feladat eredményét felhasználva:
$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

46. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x} = \ln|\operatorname{th} x| + C.$

47. $\int \frac{1}{\operatorname{sh} x}\,dx = \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C.$

48. $\ln\sqrt{1+e^{2x}} + C.$

49. $\frac{1}{\ln a}\ln(a^x + 1) + C.$

50. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x + C.$

51. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}(x+1) + C.$

52. $\begin{cases} -\frac{1}{2}\operatorname{arth}\frac{1}{2}(3x-1) + C, & \text{ha } -\frac{1}{3} < x < 1 \\ -\frac{1}{2}\operatorname{arcth}\frac{1}{2}(3x-1) + C, & \text{ha } x < -\frac{1}{3}, \text{ vagy } x > 1 \end{cases} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3x-1}{x-1}\right| + C$

53. $\begin{cases} -\frac{1}{2}\operatorname{arth}\frac{1}{2}(x-1) + C, & \text{ha } -1 < x < 3 \\ -\frac{1}{2}\operatorname{arcth}\frac{1}{2}(x-1) + C, & \text{ha } x < -1, \text{ vagy } x > 3 \end{cases} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right| + C$

54. $\begin{cases} -\frac{1}{5}\operatorname{arth}\frac{1}{5}(x-3) + C, & \text{ha } -2 < x < 8 \\ -\frac{1}{5}\operatorname{arcth}\frac{1}{5}(x-3) + C, & \text{ha } x < -2, \text{ vagy } x > 8 \end{cases} = -\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x+2}{x-8}\right| + C$

55. $\int \frac{x\,dx}{4+x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(x^2/2)^2}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)'\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + C.$

56. $\dfrac{1}{2a^4}\displaystyle\int \dfrac{1}{1-(x^2/a^2)^2}\cdot 2x\,dx$ átalakítással az eredmény

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2a^2}\operatorname{arth}\dfrac{x^2}{a^2}+C=\dfrac{1}{4a^2}\ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}+C, & \text{ha } |x|<|a| \\ \dfrac{1}{2a^2}\operatorname{arcth}\dfrac{x^2}{a^2}+C=\dfrac{1}{4a^2}\ln\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}+C, & \text{ha } |x|>|a|. \end{cases}$$

57. $\dfrac{-1}{4\sqrt{2}}\displaystyle\int \dfrac{1}{1-\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\dfrac{4x^3}{\sqrt{2}}\,dx$ átalakítással az eredmény: $\dfrac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\dfrac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C$,
ill.
$-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arth}\dfrac{x^4}{\sqrt{2}}+C$, ha $|x|<\sqrt[8]{2}$, és
$-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arcth}\dfrac{x^4}{\sqrt{2}}+C$, ha $|x|>\sqrt[8]{2}$.

58. $\frac{1}{3}\operatorname{arsh}(3x-1)+C$.

59. A $\sqrt{9x^2-6x+5}=2\sqrt{(\frac{3x-1}{2})^2+1}$ átalakítással:
$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+5}}=\frac{1}{3}\operatorname{arsh}\frac{3x-1}{2}+C=\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{9x^2-6x+5}+3x-1\right|+C.$$

60. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x-3}}=\frac{1}{3}\operatorname{arch}\frac{3x-1}{2}+C=\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{9x^2-6x-3}+3x-1\right|+C.$

61. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{3+6x-9x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{2}+C.$

62. $(1/\sqrt{3})\operatorname{arch}(\sqrt{3}x)+C$.

63. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\dfrac{3}{2}}x+C$.

64. $\displaystyle\int\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}^2\right)}\cdot(\sqrt{x})'\cdot 2\,dx=2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C.$

65. $2\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=2e^{\sqrt{x}}+C.$

66. $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\cdot(e^x)'\,dx=\arcsin e^x+C.$

67. $\dfrac{1}{\ln a}\displaystyle\int\frac{1}{1+(a^x)^2}\cdot a^x\ln a\,dx=\frac{1}{\ln a}\operatorname{arctg}a^x+C.$

68. $-\cos\ln x+C$.

69. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{\operatorname{ch}2x}}\,dx=\int\frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{2\operatorname{ch}^2x-1}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}\operatorname{ch}x)^2-1}}\cdot(\sqrt{2}\operatorname{ch}x)'\,dx=$
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arch}(\sqrt{2}\operatorname{ch}x)+C.$

70. $\ln|\ln x|+C$.

71. $\ln|\ln\ln x|+C$.

72. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2x+2\cos^2x}=\int\frac{dx}{2\cos^2x\left(\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)}=$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\int \dfrac{1}{1+\left(\operatorname{tg} x/\sqrt{2}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos^2 x}\, dx$ átalakítással az eredmény

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$

73. A előző feladat megoldásához hasonlóan az eredmény

$$\begin{cases} ab \operatorname{arctg}\left(\dfrac{a}{b}\operatorname{tg} x\right) + C, & \text{ha } |a| \neq |b| \\ a^2 x + C, & \text{ha } |a| = |b|. \end{cases}$$

74. $x\sin x + \cos x + C,$

75. $-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

76. $\frac{1}{2}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

77. $\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

78. $-\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

79. $-x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C.$

80. $x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x + C.$

81. $\frac{1}{8}(2x^2 + 2x\sin 2x + \cos 2x) + C.$

82. $\dfrac{3^x}{\ln 3}\left(x - \dfrac{1}{\ln 3}\right) + C.$

83. $-(x+1)e^{-x} + C.$

84. $-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + C.$

85. $-\dfrac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + C.$

86. $\dfrac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$

87. $\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C,$ $(a, b \neq 0$ konstans$)$.

88. $\frac{1}{26}e^{6x}(3\cos 4x + 2\sin 4x) + C.$

89. $\frac{1}{10}e^x(5 - \cos 2x - 2\sin 2x) + C.$

90. $f'(x)$-ként az 1 konstansfüggvényt választjuk. Az eredmény:
$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

91. $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$

92. $2\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x}\cdot \arcsin\sqrt{x} + C.$

93. $x\arccos\dfrac{1}{x} - \operatorname{arch} x + C.$

94. $x\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{2}\ln(x^2+9) + C.$

95. Legyen $f'(x) = x$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$ és $f(x) = x^2/2$. Ekkor

$$\int x\operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)}\, dx = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$$

Megjegyzés: Az $f(x)$ megválasztásánál általában nem vagyunk tekintettel az integrációs konstansra, ügyes megválasztása azonban néha egyszerüsítheti a megoldást. Például az $f(x) = (x^2+1)/2$ választással:

$$\int x\operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^2+1}\, dx = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$$

96. $$I = \int \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}\, dx = x\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} - \int \frac{x}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}\, dx$$

$$= x\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} - \int \frac{x dx}{x^2+1} = x\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C\,.$$

97. $-\sqrt{x}+(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C.$

98. $\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\operatorname{arctg}x\,dx = x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C.$

99. $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\operatorname{arsh}x+C=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$

100. $\int 1\cdot\ln x\,dx = x\ln x - x + C.$ **101.** $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C.$

102. $x(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6)+C.$ **103.** $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C.$

104. $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C.$ **105.** $x\ln\frac{8-x}{3}-x-8\cdot\ln|x-8|+C.$

106. $x\lg\frac{4e}{x}+C.$

107. $\frac{x^3+1}{3}\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C.$

108. $C-\frac{1}{2x^2}\ln(x\sqrt{e}).$ **109.** $\frac{x^{v+1}}{v+1}\left(\ln x-\frac{1}{v+1}\right)+C.$

110. $\operatorname{tg}x\cdot\ln\cos x+\operatorname{tg}x-x+C.$ **111.** $x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x+C.$

112. $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x}{9}\right)\operatorname{sh}3x-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{27}\right)\operatorname{ch}3x+C.$

113. $(-x^2+2x-2)\operatorname{ch}x+(2x-2)\operatorname{sh}x+C.$ **114.** $\frac{1}{26}(\operatorname{sh}x\cos 5x+5\operatorname{ch}x\sin 5x)+C.$

115. A kiszámítandó integrált röviden I-vel jelölve

$$\begin{aligned}
I &= \int\cos^{n-1}x\cos x\,dx = \\
&= \cos^{n-1}x\sin x+\int(n-1)\cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx = \\
&= \cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)\,dx = \\
&= \cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx-(n-1)I\,. \\
nI &= \cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx, \\
I &= \frac{1}{n}\cos^{n-1}\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx\,.
\end{aligned}$$

116. Hasonlóan az előző feladat megoldásához.

117. $x=\sin t$ helyettesítéssel $\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$

118. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$ **119.** $\frac{a^2}{2}\operatorname{arsh}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C.$

120. $\frac{5}{2\sqrt{3}}\operatorname{arsh}\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}}+\frac{x}{2}\sqrt{5+3x^2}+C.$ **121.** $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$

122. $u=\sqrt{c+x}$ helyettesítéssel a megoldás: $\frac{2}{15}\sqrt{(c+x)^3}(3x-2c)+C.$

123. $u=\sqrt{c+x}$ helyettesítéssel $-\frac{2}{\sqrt{c}}\operatorname{arth}\frac{\sqrt{c+x}}{c}+C=\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left|\frac{\sqrt{c+x}-c}{\sqrt{c+x}+c}\right|+C.$

124. $\frac{3}{8}\operatorname{arch} x+\frac{1}{8}x\sqrt{x^2-1}(2x^2-1)-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+C.$

125. $x=\sin t$ helyettesítéssel a megoldás $\operatorname{tg}\arcsin x+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$

126. $x=\operatorname{sh} t$ helyettesítéssel $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arsh} x+x\sqrt{1+x^2}\right)+C.$

127. $x=\operatorname{sh} t$ helyettesítéssel $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\operatorname{arsh} x+C.$

128. A $\sqrt{x}=\operatorname{ch} t$ helyettesítéssel a megoldás: $\operatorname{arch}\sqrt{x}+\sqrt{x(x-1)}+C.$

Vagy: $\sqrt{\frac{x}{x-1}}=u$ helyettesítéssel $\int\frac{-2u^2}{(u^2-1)^2}\,du$ adódik, ezt $u\cdot\frac{-2u}{(u^2-1)^2}$ felbontással parciálisan integrálva a végeredmény:

$\sqrt{x(x-1)}+\operatorname{arth}\sqrt{\frac{x}{x-1}}+C.$

129. A $\sqrt{x}=\sin t$ helyettesítéssel $\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x(1-x)}+C.$

Vagy: $\sqrt{\frac{x}{1-x}}=u$ helyettesítéssel $-\sqrt{x(1-x)}+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C.$

130. A

$$\sqrt{3-2x-x^2}=\sqrt{4-(x+1)^2}=\sqrt{4\left(1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right)}$$

átalakítás után az $\frac{x+1}{2}=\sin t$ helyettesítéssel a megoldás:

$2\arcsin\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+C.$

131. $\frac{5}{2\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}x+\frac{x}{2}\sqrt{5-3x^2}+C.$

132. $\frac{1}{2}\operatorname{arsh}(x+1)+\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+2}+C.$

133. A $\sqrt{3x^2-3x+1}=\sqrt{3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2+1}$ átalakítás után a $2\sqrt{3}x-\sqrt{3}=\operatorname{sh} t$ helyettesítéssel a megoldás:

$\frac{1}{8\sqrt{3}}\left[\operatorname{arsh}(2\sqrt{3}x-\sqrt{3})+(2\sqrt{3}x-\sqrt{3})\sqrt{3(2x-1)^2+1}\right]+C.$

134. $2\operatorname{arsh}\frac{x-1}{2}+\frac{x-1}{2}\sqrt{5-2x+x^2}+C.$

135. $8\arcsin\frac{x-1}{4}+\frac{x-1}{2}\sqrt{15+2x-x^2}+C.$

136. Az $\frac{x}{a}=\operatorname{sh} u$ helyettesítéssel $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C.$

137. $u=\frac{a}{x}$ helyettesítéssel a megoldás: $-\frac{1}{a}\operatorname{arsh}\frac{a}{x}+C.$

138. $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}-\sqrt{1+x^2}+C.$

139. $\frac{1}{12}\sqrt{(1+2x^2)^3}-\frac{1}{4}\sqrt{1+2x^2}+C.$

140. $x = \dfrac{1}{u}$ helyettesítéssel $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x^3}{x^3+1}\right| + C$.

141. A $x = u^4$ helyettesítéssel a megoldás: $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right) + C$.

142. Az $x = u^6$ helyettesítéssel a megoldás: $6\left(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right) + C$.

143. $x = u^2$ helyettesítéssel a megoldás: $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$.

144. $x = u^4$ helyettesítéssel a megoldás: $\dfrac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3} - \ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right] + C$.

145.
$$\begin{cases} \sqrt{2}\operatorname{arth}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{2}} + C, & 2\operatorname{arctg}(1-\sqrt{2}) < x < 2\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2}) \\ \sqrt{2}\operatorname{arcth}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{2}} + C, & x < 2\operatorname{arctg}(1-\sqrt{2}), \text{ vagy } x > 2\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2}) \end{cases}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{2}-1)\cos x + \sin x + \sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)\cos x - \sin x + \sqrt{2}+1}\right| + C.$$

146. A $\sin x = t$ helyettesítéssel, vagy (6) alapján, és felhasználva, hogy $\sqrt{1-\cos^2 x} = \operatorname{sgn}(\sin x)$, az eredmény:
$$-\operatorname{sgn}(\sin x)\operatorname{arsh}(\sin x) + C = -\operatorname{sgn}(\sin x)\ln\left(\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right) + C.$$

147. $-\dfrac{2}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1} + C$.

148. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + C$.

149. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

150. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) + C$.

151. $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítéssel $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{5\operatorname{tg} x + 4}{3} + C$.

152. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sin^4 x} = \int \frac{dx}{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)}$ átalakítás után $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítéssel $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C$.

153. $\operatorname{tg} x = t$ helyettesítéssel $(1/2)\operatorname{tg}^2 x - (1/2)\operatorname{ctg}^2 x + 2\ln|\operatorname{tg} x| + C$. A számítás rövidebb, ha a $\sin^3 x\cos^3 x = \frac{1}{8}\sin^3 2x$ átalakítással kezdjük, majd a $\sin 2x$ helyébe (a $\operatorname{tg} x = t$ helyettesítésnek megfelelően) a $\dfrac{2t}{1+t^2}$ kifejezést írjuk.

154. $x = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$ helyettesítéssel: $\displaystyle\int \frac{3\operatorname{tg}^2 t - 1}{\left(\operatorname{tg}^2 t + 1\right)^3}\frac{dt}{\cos^2 t} =$
$$= \int\left(3\sin^2 t\cos^2 t - \cos^4 t\right)dt = \sin t\cos^3 t = \frac{\operatorname{tg} t}{(\operatorname{tg} t + 1)^2} = \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

155. Az $u = \ln x$ helyettesítéssel $\ln x(\ln\ln x - 1) + C$.

156. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)}}$ átalakítás után $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítéssel $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arsh}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C$.

157. Az $\sqrt{e^x-1}=u$ helyettesítéssel $2\int\frac{u^2}{u^2+1}\,du=$
$=2\left(\sqrt{e^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}\right)+C.$

158. $e^x-\ln(e^x+1)+C.$

159. $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C.$

160. A $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ helyettesítéssel a kiszámítandó I integrál: $I=\frac{2}{c+b}\int\frac{dt}{1+\frac{c-b}{c+b}t^2}.$

Az $c=b$ esetben $I=\frac{1}{c}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$

Ha $c>b$: $\frac{c-b}{c+b}t^2=\left(\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}t\right)^2$, $I=\frac{2}{\sqrt{c^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$

Az $c<b$ esetben $\frac{c-b}{c+b}t^2=-\left(\sqrt{\frac{b-c}{c+b}}t\right)^2$, és ezért

$$I=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arth}\left(\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C, & \text{ha } |x|<2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b+c}{b-c}}\\ \frac{2}{\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arcth}\left(\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C, & \text{ha } |x|>2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b+c}{b-c}}.\end{cases}$$

161. $\frac{1}{x^3-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$. A kiszámítandó határozatlan integrál:

$$\int\left(\frac{\frac{1}{12}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{12}(x+4)}{x^2+2x+4}\right)dx=\frac{1}{24}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+K.$$

162. $-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-3|+C.$

163. $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C.$

164. $\ln\left|\frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}\right|+C.$

165. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

166. $-\frac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x+2|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C.$

167. $\int\left(\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}+\frac{A_3}{(x-2)^3}+\frac{A_4}{(x-2)^4}\right)dx=$

$$=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^3}+\frac{1}{(x-2)^4}\right)dx=$$

$$=\ln|x-2|+\frac{1}{2(x-2)^2}-\frac{1}{3(x-2)^3}+C\,.$$

168. $\int\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{4(x-2)}+\frac{1}{2(x-2)^2}\right)dx=$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2(x-2)}+C.$$

169. $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C.$

170. $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

171. $\frac{1}{6}\int \frac{6x^5}{x^6(3+5x^6)}\,dx$ átalakítás és $u = x^6$ helyettesítés után elemi törtekre bontással az eredmény: $\frac{1}{18}\ln\frac{x^6}{5x^6+3}+C$.

172. $\int \frac{8x^3}{x^4(7+3x^4)}\,dx$ átalakítás és $u = x^4$ helyettesítés után elemi törtekre bontással az eredmény: $\frac{7}{2}\ln\frac{x^4}{3x^4+7}+C$.

173. $2\ln\left|\frac{e^x-3}{e^x}\right|+C$.

174. Az $x^x = t$ helyettesítéssel $x\ln x = \ln t$; mindkét oldalt t szerint differenciálva $(\ln x+1)\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$. Emiatt

$$\int \frac{\ln x+1}{x^x-1}\,dx = \int \frac{\ln x+1}{t-1}\cdot\frac{dt}{t(\ln x+1)} = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt =$$
$$= \ln\left|\frac{x^x-1}{x^x}\right|+C\,.$$

175. $2\left(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)+C$.

176. Parciális integrálással: $xf'(x)-f(x)+C$.

177. $\frac{1}{2}f(2x)$.

178. Az adott egyenletből kapjuk, hogy $2xf'(x^2) = 2$, aminek mindkét oldalát integráljuk: $f(x^2) = 2x+C$, azaz $f(x) = 2\sqrt{x}+C$.

179. $f(x) = x-\frac{1}{2}x^2+C$.

180. A formula igaz voltát mindkét oldal deriválásával igazolhatjuk.

181. Ha $x\ge 0$, akkor az integrál értéke $\frac{1}{2}x^2+C_1$, ha $x\le 0$, akkor az integrál értéke $-\frac{1}{2}x^2+C_2$. A két konstanst úgy kell megválasztani, hogy a kapott függvény mindenütt differenciálható legyen. Így az integrál értéke: $\frac{1}{2}x|x|+C$.

182. $\frac{1}{3}x^2|x|+C$.

183. $\frac{1}{2}((1+x)|1+x|+(1-x)|1-x|)+C$.

184. e^x-1+C, ha $x<0$; $1-e^{-x}+C$, ha $x\ge 0$.

185. $x+C$, ha $|x|\le 1$; $\frac{1}{3}(x^3+2\operatorname{sgn}x)+C$, ha $|x|>1$.

186. $\int \frac{1}{x^2}\arcsin x\,dx = -\frac{1}{x}\arcsin x+\int\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. A második tagban $x = \frac{1}{u}$ helyettesítéssel a végeredmény: $-\frac{1}{x}\arcsin x-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$.

187. $\int \frac{x^2+(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}\,dx = \int\frac{1}{1+x^2}\,dx+\int\frac{1}{x^2}\,dx = \operatorname{arctg}x-\frac{1}{x}+C$.

188. $\frac{x^2}{2}\ln(4+x^4)-x^2+2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}+C$.

189. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x^3-5)^2-16} = -\frac{1}{3\cdot 4^2}\int \frac{1}{1-\left(\frac{x^3-5}{4}\right)^2}\cdot 3x^2\,dx$ átalakítással

az eredmény: $\begin{cases} -\dfrac{1}{12}\operatorname{arth}\dfrac{x^3-5}{4}+C, & \text{ha } 1<x<3\sqrt{3} \\ -\dfrac{1}{12}\operatorname{arcth}\dfrac{x^3-5}{4}+C, & \text{ha } x<1, \text{ vagy } x>3\sqrt{3}\,. \end{cases}$

190. $\displaystyle\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}+C.$

191. $\displaystyle\frac{2}{9}\ln\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{27}\cdot\frac{1}{x-\frac{2}{3}}+C.$ **192.** $\displaystyle\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+8)-4\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C.$

193. A nevezőt másodfokú tényezőkre bontjuk: $1+x^4=1+2x^2+x^4-2x^2=\left(1+x^2\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2=(1+x^2+\sqrt{2}x)(1+x^2-\sqrt{2}x)$.

Tehát $\displaystyle\frac{1}{1+x^4}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$, azaz

$1=(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1)$, amiből

$1=(A+C)x^3+(-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D)x^2+(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D)x+B+D.$

A megfelelő együtthatók összehasonlításából:

$$\begin{aligned} A+C&=0\\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D&=0\\ A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D&=0\\ B+D&=1\,. \end{aligned}$$

Ezekből $B=D=\dfrac{1}{2}$, $C=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $A=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\left(\frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1}+\frac{1}{(\sqrt{2}x-1)^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}}+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)\right]+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\sqrt{\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)+C.$$

194. $\displaystyle 2\sqrt{7}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C.$

195. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arth}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2}}+C$, ha $\sqrt{1-\sqrt{2}}<x<\sqrt{1+\sqrt{2}}$, és
$-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arcth}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2}}+C$, ha $x<-\sqrt{1-\sqrt{2}}$, vagy $x>\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

196. Az $\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}$ felbontással parciális integrálást végezve, majd a még integrálandó tag számlálójában $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ átalakítást alkalmazva a kiszámítandó I határozatlan integrálra az $I=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-I+\displaystyle\int\dfrac{dx}{\cos x}$ egyenletet kapjuk, amiből
$I=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\right)+C.$

197. $-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C.$

198. $-\dfrac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh} x}-\dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right|+C.$

199. $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x\cos^2 x}\,dx=\int\frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)}{\cos^2 x}\,dx=$
$\displaystyle=\operatorname{tg} x+\int\operatorname{tg}^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C\,.$

200. $-\operatorname{ctg} x-\dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+C.$

201. $\operatorname{tg}^3 x\,dx=\displaystyle\int\operatorname{tg}^2 x\cdot\operatorname{tg} x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\operatorname{tg} x\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C.$

202. $\displaystyle\int\frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx=\int\frac{1}{\sin 2x}\,dx+\int\frac{\operatorname{tg} x}{2\sin x\cos x}\,dx=\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x|+\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+C.$

203. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}x+C.$

204. $\operatorname{tg}^2 x\,dx=\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\operatorname{tg} x-x+C.$

205. $u=\operatorname{tg} x$ helyettesítéssel
$\displaystyle\int\frac{u^5}{1+u^2}\,du=\int\left(u^3-u+\frac{u}{u^2+1}\right)du=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C.$

206. $\operatorname{tg} x-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\sin 2x}{4}+C.$

207. $\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x+2\sin 2x+\frac{3}{8}\sin 4x-\frac{1}{6}\sin^3 2x\right)+C.$

208. Az $u'=x$ és $v=(\operatorname{arctg} x)^2$ választással $\displaystyle\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx=\frac{x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2-$
$\displaystyle-\int\frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x\,dx=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$ (Lásd a 11.103/a és /b feladatokat.)

209. $a^x\left(\dfrac{x^2}{\ln a}-\dfrac{2x}{\ln^2 a}+\dfrac{2}{\ln^3 a}\right)+C.$

210. $\operatorname{ch} x+\dfrac{2}{\operatorname{ch} x}-\dfrac{1}{3\operatorname{ch}^3 x}+C.$

211. $t = \operatorname{th} \dfrac{x}{2}$ helyettesítéssel az eredmény: $\dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{arth} \dfrac{a \operatorname{th} \frac{x}{2} - b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

212. A kiszámítandó integrált I-vel jelölve

$$I = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{(a + b \operatorname{sh} x)^2}\, dx = -\frac{1}{b^2} \int b \operatorname{ch} x \frac{-b \operatorname{ch} x}{(a + b \operatorname{sh} x)^2}\, dx - \frac{1}{b^2} \int \frac{b^2 \operatorname{sh}^2 x}{(a + b \operatorname{sh} x)^2}\, dx.$$

Parciálisan integrálva a $g = b \operatorname{ch} x$ és $f' = \dfrac{-b \operatorname{ch} x}{(a + b \operatorname{sh} x)^2}$ választással

$$I = -\frac{1}{b^2} \left[\frac{b \operatorname{ch} x}{a + b \operatorname{sh} x} - \int \frac{a}{a + b \operatorname{sh} x}\, dx \right] - \frac{a^2}{b^2} I,$$

$$I = -\frac{1}{a^2 + b^2} \left[\frac{b \operatorname{ch} x}{a + b \operatorname{sh} x} - \int \frac{a}{a + b \operatorname{sh} x}\, dx \right] + C\,.$$

Az utóbbi integrál kiszámításához lásd az előző feladatot.

213. $\frac{1}{2} x\, (\sin \ln x - \cos \ln x) + C$.

214. $\operatorname{arsh} x - \operatorname{arch} x + C$.

215. $|a| = |b|$ esetén az integrál $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{|a|}\, dx = \frac{1}{2|a|} \sin^2 x + C$.

$|a| \neq |b|$ esetben viszont $\left(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x\right)' = 2(a^2 - b^2) \sin x \cos x$.

Ekkor az eredmény: $\dfrac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2} + C$.

216. $\sqrt{3} \cos x = \operatorname{sh} u$-t véve $I = -\sqrt{3} \left[-\operatorname{cth} \operatorname{arsh}(\sqrt{3} \cos x) + \operatorname{arsh}(\sqrt{3} \cos x) \right] + C$.

217. $I = \displaystyle\int \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \sqrt{1 + \cos^4 x}\, dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^4 x} \sqrt{1 + \cos^4 x}\, dx$.

Legyen $\cos^2 x = \operatorname{sh} u$, ekkor $-2 \cos x \sin x\, dx = \operatorname{ch} u\, du$, és

$$I = \int \frac{-\operatorname{ch}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u}\, du = -\int \frac{1 + \operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u}\, du = \operatorname{cth} u - u + C = \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} - u + C =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \cos^4 x}}{\cos^2 x} - \operatorname{arsh} \cos^2 x + C\,.$$

218. Átalakításokkal $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{1}{4}(1 + 3 \cos^2 2x)$.

$I = \displaystyle\int \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 2x}\, dx$. Legyen $\sqrt{3} \cos 2x = \operatorname{sh} u$, akkor

$$I = -\frac{1}{16\sqrt{3}} \left[\operatorname{arsh}(\sqrt{3} \cos 2x) + \sqrt{3} \cos 2x \sqrt{1 + 3 \cos^2 2x} \right].$$

219. $I = \displaystyle\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(a + b \cos x)^2}\, dx =$

$$= \frac{1}{b^2} \int b \sin x \frac{b \sin x}{(a + b \cos x)^2}\, dx + \frac{1}{b^2} \int \frac{b^2 \cos^2 x}{(a + b \cos x)^2}\, dx.$$

Parciálisan integrálva a $g = b \sin x$ és $f' = \dfrac{b \sin x}{(a + b \cos x)^2}$ választással

$$I = \frac{1}{b^2} \frac{b \sin x}{a + b \cos x} - \frac{1}{b^2} \int \frac{a}{a + b \cos x}\, dx + \frac{a^2}{b^2} I.$$