Függvények vizsgálata

1) Végezzük el az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ polinomfüggvény vizsgálatát!
Megoldás:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = \mathbb{R}$.
- *Zérushelyek:* Próbálgatással könnyen adódik, hogy $f(1) = 0$. Ezután polinomosztással:

$$\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) / (x-1) = x^2 - 5x + 6$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases},$$

tehát $f(2) = f(3) = 0$.

- *Első derivált vizsgálata:*

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

Ennek gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-132}}{6} = \frac{12 \pm 2\sqrt{3}}{6} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

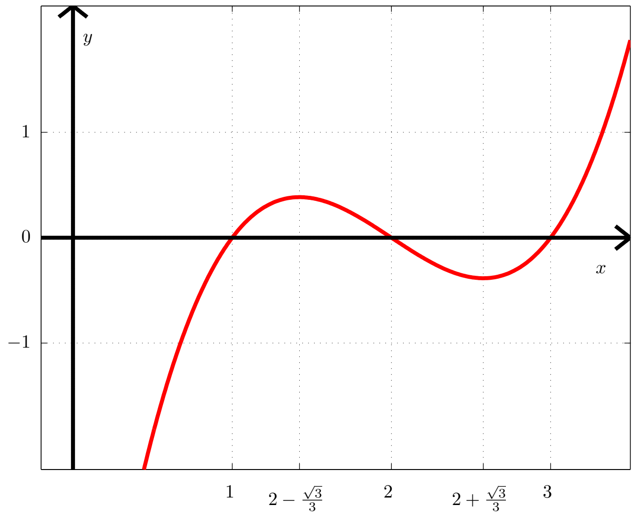
x_1 és x_2 között $f'(x) < 0$, egyébként $f'(x) > 0$.

- *Második derivált vizsgálata:*

$$f''(x) = 6x - 12$$

$f''(x) = 0$, ha $x = 2$; $f''(x) < 0$, ha $x < 2$, $f''(x) > 0$, ha $x > 2$.
Táblázatos formában összefoglalva:

x	$x < 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$	$2 - \frac{\sqrt{3}}{3} < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$	$x > 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	növekvő	max.	csökkenő			min.	növekvő
	konkáv			inflex.	konvex		



1. ábra. az $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ függvény képe

2) Vizsgáljuk meg az $f(x) = \sin^2 x$ függvényt!
Megoldás:

- *Periodicitás:* Mivel $\sin(x+\pi) = \sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi = -\sin x$, ezért $\sin^2 x = \sin^2(x+\pi)$, a függvény π szerint periodikus.
- *Zérushelyek:* A $[0,\pi]$ intervallumon zérushelyek: 0, és π.
- *Első derivált zérushelyei:*

$$f' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

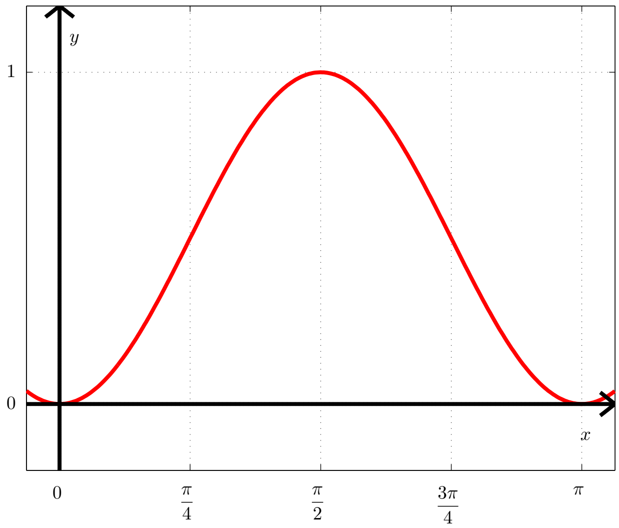
Ennek zérushelyeire $2x = 0, \pi, 2\pi$. Innen a zérushelyek: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$, és $x_3 = \pi$. Ezért $f'(x) > 0$ a $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, valamint $f'(x) < 0$ a $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ intervallumon.

- *A második derivált:*

$$f''(x) = 2\cos 2x$$

Ennek zérushelyeire: $2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Eszerint $x_1 = \frac{\pi}{4}$ és $x_2 = \frac{3\pi}{4}$. Innen $f''(x) > 0$, ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, és $f''(x) < 0$, ha $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

x	$x=0$	$0<x<\frac{\pi}{4}$	$x=\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}$	$x=\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}<x<\pi$	$x=\pi$
$f'(x)$	0	+	+	+	0	$-$	$-$	$-$	0
$f''(x)$	+	+	0	$-$	$-$	$-$	0	+	+
$f(x)$	min.	növekvő			max.	csökkenő			min.
	konvex		inflex.	konkáv			inflex.	konvex	



2. ábra. az $y = \sin^2 x$ függvény képe

3) Végezzük el az $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x$ függvény vizsgálatát!

Megoldás:

A függvény 2π szerint periodikus, ezért a $[0{,}2\pi]$ intervallumban vizsgáljuk.

– *Az első derivált zérushelyei:*

$$f'(x) = 2\sin x\cos x - 2\cos x = 2\cos x(\sin x - 1)$$

$f'(x) = 0$, ha $\cos x = 0$, vagy $\sin x = 1$. Ezek szerint $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.
(A harmadik zérushely $x_3 = \frac{\pi}{2}$ lenne, ami egybeesik x_1-gyel.)

– *A második derivált zérushelyei:*

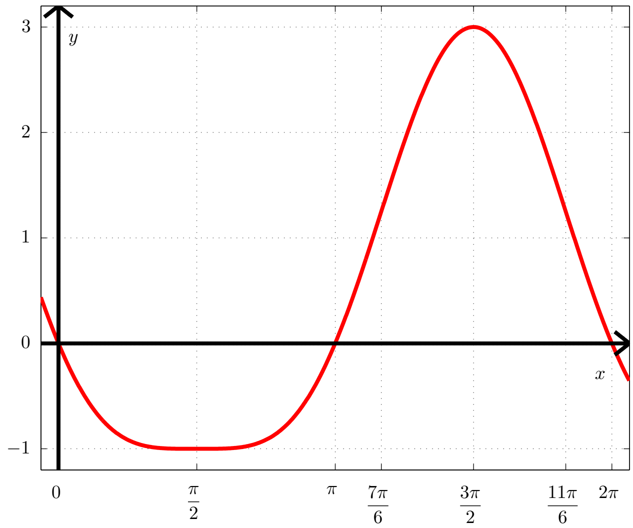
$$f''(x) = -2\sin x(\sin x - 1) + 2\cos^2 x = -2\sin^2 x + 2\sin x + 2\left(1 - \sin^2 x\right) = -4\sin^2 x + 2\sin x + 2$$

Ez $\sin x$-ben másodkofú egyenlet, megoldásai:

$$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \longrightarrow \begin{cases} (\sin x)_1 = 1 & \Longrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} \\ (\sin x)_2 = -\frac{1}{2} & \Longrightarrow x_2 = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

Táblázatosan összefoglalva:

x	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{6}$	$x = \frac{7\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < \frac{11\pi}{6}$	$x = \frac{11\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6} < x < 2\pi$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	csökk.	min.	növekvő			max.	csökkenő		
	konvex			inflex.	konkáv			inflex.	konvex



3. ábra. az $y = \sin^2 x - 2\sin x$ függvény képe

4) Vizsgáljuk az $f(x) = \dfrac{6x-4}{x^2}$ racionális törtfüggvényt!

Megoldás:

A függvény határértékei: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, és $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Értelmezési tartomány: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A szakadási helyen a határérték mindkét oldalról $-\infty$.

Az első derivált zérushelyei:

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 2x(6x-4)}{x^4} = \frac{-6x^2+8x}{x^4} = \frac{2x(-3x+4)}{x^4}$$

$f'(x) = 0$, ha $-3x+4 = 0$, vagyis ha $x = \dfrac{4}{3}$. Másik gyök nincs, hiszen az $x = 0$ esetet az értelmezési tartományból kizártuk. $f'(x) < 0$, ha $x < 0$, és ha $x > \dfrac{4}{3}$. $f'(x) > 0$, ha $0 < x < \dfrac{4}{3}$.

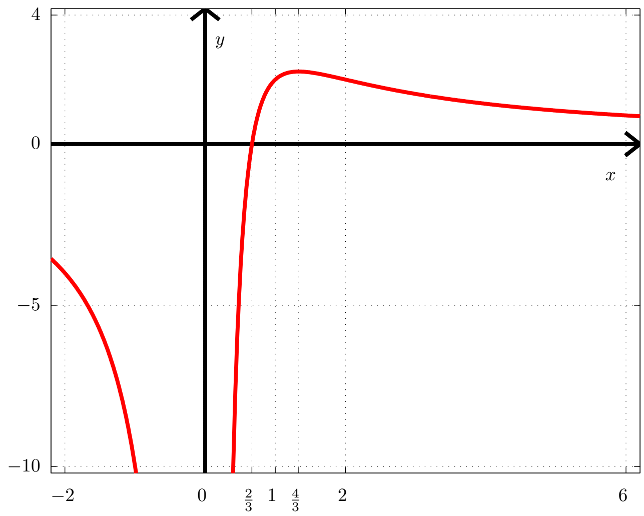
Az második derivált zérushelyei:

$$f''(x) = \frac{(-12x+8)x^4 - 4x^3\left(-6x^2+8x\right)}{x^8} = \frac{12(x-2)}{x^4}$$

Ennek egyetlen zérushelye van, az $x = 2$. $f''(x) > 0$, ha $x > 2$, és $f''(x) < 0$, ha $x < 2$.

Táblázatos formában összefoglalva:

x	$x<0$	$0<x<\frac{4}{3}$	$x=\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}<x<2$	$x=2$	$2<x$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	csökkenő	növekvő	max.	csökkenő		
	konkáv	konkáv			inflex.	konvex



4. ábra. az $y=\frac{6x-4}{x^2}$ függvény képe

Egyváltozós függvény szélsőértékeinek meghatározása

1) $y=x^3-12$

Megoldás:

Az első derivált:

$$y'=3x^2-12$$

Az $y'=3x^2-12=0$ egyenlet megoldásai: $x_1=2$, és $x_2=-2$.

A második derivált:

$$y''=6x$$

- $y''(2)=12>0$, ezért az $x_1=2$ helyen lokális minimum van, értéke $y(2)=-16$.
- $y''(-2)=-12<0$, ezért az $x_2=-2$ helyen lokális maximum van, értéke $y(2)=16$.

2) $y = x^4 e^{x^2}$

Megoldás:

Az első derivált:

$$y' = 4x^3 e^{-x^2} + x^4 e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}\left(4x^3 - 2x^5\right)$$

Ez akkor és csak akkor 0, ha a szorzat valamelyik tényezője 0. $e^{-x^2} > 0\ \forall x \in \in \mathbb{R}$, ebből nem kapunk zérushelyet. $\left(4x^3 - 2x^5\right) = x^3\left(2 - x^2\right) = 0$ egyenlet megoldásai: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$. Az első derivált:

$$y'' = (-2x)\, e^{-x^2}\left(4x^3 - 2x^5\right) + e^{-x^2}\left(12x^2 - 10x^4\right) = e^{-x^2}\left(-8x^4 + 4x^6 + 12x^2 - 10x^4\right)$$

- $y''\left(\sqrt{2}\right) = -\dfrac{16}{e^2} < 0$, ezért az $x_2 = \sqrt{2}$ helyen lokális maximum van, értéke $y\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{4}{e^2}$.
- $y''\left(-\sqrt{2}\right) = -\dfrac{16}{e^2} < 0$, ezért az $x_3 = -\sqrt{2}$ helyen lokális maximum van, értéke $y\left(-\sqrt{2}\right) = \dfrac{4}{e^2}$.
- $y''(0) = 0$, ezért ezt az esetet tovább kell vizsgálni.
  A harmadik derivált:
  $$y''' = e^{-x^2}\left(24x - 96x^3 + 60x^5 - 8x^7\right)$$
  Innen $y'''(0) = 0$, vagyis a negyedik deriváltat is meg kell vizsgálni.
  $$y^{(\mathrm{IV})} = e^{-x^2}\left(24 - 336x^2 + 492x^4 - 176x^6 + 16x^8\right)$$
  Behelyettesítés után: $y^{(\mathrm{IV})}(0) = 24 > 0$, vagyis $x_1 = 0$ helyen a függvénynek minimuma van, értéke $y(0) = 0$.

3) $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

Megoldás:

Az első derivált:

$$y' = 3x^2 - 18x + 15$$

Ennek zérushelyei: $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Az második derivált:

$$y'' = 6x - 18$$

- $y''(5) = 12 > 0$, azaz itt a függvénynek minimuma van, értéke $y(5) = = -28$.

- $y''(1) = -12 < 0$, azaz itt a függvénynek maximuma van, értéke $y(1) = = 4$.

4) $y = x + \dfrac{1}{x}$

Megoldás:
Az első derivált:
$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$
Ennek zérushelyei: $x_1 = 1$, és $x_2 = -1$.
Az második derivált:
$$y'' = \frac{2x}{x^4} = 2x^3$$
- $y''(1) = 2 > 0$, azaz itt a függvénynek minimuma van, értéke $y(1) = 2$.
- $y''(-1) = -2 < 0$, azaz itt a függvénynek maximuma van, értéke $y(-1) = -2$.

5) $xy^2 - x^2y = 2a^3$

Megoldás:
A teljes egyenlet egyszeri deriválása után kifejezhető az y'. Az első derivált:
$$y^2 + 2xyy' - 2xy - x^2y' = 0$$
Innen átrendezéssel adódik az y':
$$y' = \frac{2xy - y^2}{2xy - x^2}$$
Ennek zérushelye akkor van, ha a számláló 0, azaz ha $2xy - y^2 = y(2x - y) = = 0$. Innen $y = 2x$ következik, hiszen kikötöttük, hogy $y \neq 0$. Ezt az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve:
$$\begin{aligned} 4x^3 - 2x^3 &= 2a^3 \\ 2x^3 &= 2a^3 \\ x &= a \end{aligned}$$
Ebből $y = 2a$ következik.
A második derivált:
$$2y + 2yy' + 2(y')^2 x + 2xyy'' - 2xy' - 2y - 2xy' - x^2y'' = 0$$
Az egyszerűsítések és átrendezés után:
$$y'' = \left.\frac{-2y}{2xy - x^2}\right|_{x=a, y=2a} = \frac{-4a}{3a^2}$$

Látható, hogy ha $a > 0$, akkor $y''(a) < 0$, vagyis maximum van, és értéke $y(a) = 2a$. Ha $a < 0$, akkor $y''(a) > 0$, ekkor minimum van, aminek értéke szintén $y(a) = 2a$.

Síkgörbék vizsgálata

Vizsgáljuk meg a következő görbéket növekedés, szélsőérték és konvexitás szempontjából!

1) $y = x^2 \ln x \quad$ x>0

Az első derivált:

$$y' = 2x \ln x + \frac{x^2}{x} = x(2\ln x + 1)$$

A második derivált:

$$y'' = 2\ln x + 1 + 2 = 2\ln x + 3$$

A harmadik derivált:

$$y''' = \frac{2}{x}$$

A vizsgált tulajdonságok:

– *Szélsőértékek:*
  $y' = 0$, ha:
  - $x = 0$, azonban ezen a helyen a függvény nem értelmezett.
  - $2\ln x = -1$, amiből átrendezéssel $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

  Az első derivált zérushelyén a második derivált értéke: $y''\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -1 + 3 = 2 > 0$, vagyis itt az eredeti függvénynek minimuma van.

– *Növekedés:*
  $y' > 0$, ha $x > e^{-\frac{1}{2}}$, tehát $y(x)$ növekszik, ha $x > e^{-\frac{1}{2}}$.
  $y' < 0$, ha $x < e^{-\frac{1}{2}}$, tehát $y(x)$ fogy, ha $x < e^{-\frac{1}{2}}$.

– *Inflexiós pont:*
  $y'' = 0$, ha $2\ln x = -3$, vagyis ha $x = e^{-\frac{3}{2}}$. A harmadik derivált értéke ezen a helyen $y'''\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{2}{e^{-\frac{3}{2}}} > 0$, vagyis az $x = e^{-\frac{3}{2}}$ helyen inflexiós pont van.

– *Konvexitás:*
  $y'' > 0$, ha $x > e^{-\frac{3}{2}}$, tehát $x \in \left]e^{-\frac{3}{2}}, \infty\right)$ esetében konvex.
  $y'' < 0$, ha $x < e^{-\frac{3}{2}}$, tehát $x \in \left]0, e^{-\frac{3}{2}}\right[$ esetében konvex.

2) $y = e^{-x^2}$

Az első derivált:

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

A második derivált:

$$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(4x^2 - 2\right)$$

A vizsgált tulajdonságok:

– *Szélsőértékek:*
Az első derivált egyetlen helyen, az $x = 0$-ban zérus. Itt a második derivált értéke negatív, tehát az $x = 0$ helyen a függvénynek maximuma van, értéke $y(0) = 1$.

– *Növekedés:*
$y' > 0$, ha $x \in (-\infty, 0[$, ezen az intervallumon a függvény növekszik.
$y' < 0$, ha $x \in]0, \infty[$, ezen az intervallumon a függvény csökken.

– *Inflexiós pont:*
$y'' = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $2x^2 - 1 = 0$, vagyis a zérushelyek $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, és $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, ezeken a helyeken a függvénynek inflexiós pontja van.

– *Konvexitás:*
$y'' > 0$, ha $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, a görbe itt alulról konvex.
$y'' < 0$, ha $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, a görbe itt alulról konkáv.
$y'' > 0$, ha $x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$, a görbe itt alulról konvex.

3) $y = \dfrac{x}{1 + x^2} \quad 1 + x^2 > 0$

Az első derivált:

$$y' = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{1 - x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}$$

A második derivált:

$$y'' = \frac{-2x\left(1 + x^2\right)^2 - 2\left(1 + x^2\right) \cdot 2x\left(1 - x^2\right)}{\left(1 + x^2\right)^4} = \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{\left(1 + x^2\right)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{\left(1 + x^2\right)^3}$$

A vizsgált tulajdonságok:

– *Szélsőértékek:*
$y' = 0$, ha $x_1 = 1$, és $x_2 = -1$.

- $x_1 = 1$ esetén $y''(1) = \frac{2\cdot 1^3 - 6\cdot 1}{2^3} = -\frac{1}{2} < 0$, azaz itt a függvénynek maximuma van.
- $x_2 = -1$ esetén $y''(-1) = \frac{2\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1)}{2^3} = \frac{1}{2} > 0$, azaz itt a függvénynek minimuma van.

– *Növekedés:*
Az első derivált viselkedése miatt a függvény:

- $x \in (-\infty, -1[$ intervallumon csökkenő,
- $x \in]-1{,}1[$ intervallumon növekvő,
- $x \in]1, \infty)$ intervallumon csökkenő,

– *Inflexiós pont:*
$y'' = 0$, ha $x\left(x^2 - 3\right) = 0$, aminek megoldásai $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$, és $x_3 = -\sqrt{3}$. Ezeken a helyeken a függvénynek inflexiós pontja van.

– *Konvexitás:*
A második derivált viselkedése miatt a függvény:

- $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right[$ intervallumon alulról konkáv,
- $x \in \left]-\sqrt{3}{,}0\right[$ intervallumon alulról konvex,
- $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ intervallumon alulról konkáv,
- $x \in \left]\sqrt{3}, \infty\right)$ intervallumon alulról konvex.

Görbület, görbületi kör

A következő görbék adott pontjában számítsuk ki a simulókör sugarát, és középpontját!
Emlékeztető:
A simulókör egyenlete $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, ahol:

$$a = x_0 - \frac{1 + [y'(x_0)]^2}{y''(x_0)} \cdot y'(x_0)$$

$$b = y_0 + \frac{1 + [y'(x_0)]^2}{y''(x_0)}$$

$$r^2 = \frac{\left(1 + [y'(x_0)]^2\right)^3}{[y''(x_0)]^2}$$

Ha a görbe paraméteresen adott, akkor ugyanezek a paraméterek:

$$a = x - \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)\dot{y}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$

$$b = y + \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)\dot{x}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$

$$r = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$

1) $y = x^3 - 1$ az (1,0) pontban

A deriváltak értéke a megadott pontban:

$$y' = 3x^2\big|_{x=1} = 3 \qquad y'' = 6x|_{x=1} = 6$$

Innen a simulókör paraméterei behelyettesítéssel:

$$a = 1 - \frac{1+9}{6} \cdot 3 = -4$$

$$b = 0 + \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$r^2 = \frac{(1+9)^3}{36} = \frac{1000}{36} \Longrightarrow r = \frac{10\sqrt{10}}{6} = \frac{5\sqrt{10}}{3} \Longrightarrow G = \frac{3}{5\sqrt{10}}$$

2) $y^2 = 10x - 6$ az (1,2) pontban

Az egyenlet egyszeri, és kétszeri deriválása, valamint az $y_0 = 2$ behelyettesítése után kifejezhető az y' és y'':

$$2yy' = 10 \Longrightarrow 4y' = 10 \Longrightarrow y' = \frac{5}{2}$$

$$2{y'}^2 + 2yy'' = 0 \Longrightarrow y'' = \frac{-2{y'}^2}{2y} = -\frac{\frac{25}{2}}{4} = -\frac{25}{8}$$

Innen behelyettesítéssel a paraméterek értékei:

$$a = 1 - \frac{1+\frac{25}{4}}{-\frac{25}{8}} \cdot \frac{5}{2} = 1 + \frac{\frac{29}{4}}{\frac{25}{8}} \cdot \frac{5}{2} = 1 + \frac{29}{5} = \frac{34}{5} = 6{,}8$$

$$b = 2 + \frac{1+\frac{25}{4}}{-\frac{25}{8}} = 2 - \frac{29 \cdot 8}{25 \cdot 4} = \frac{50-58}{25} = -\frac{8}{25} = -0{,}32$$

$$r^2 = \frac{\left(1+\frac{25}{4}\right)^3}{\left(\frac{25}{8}\right)^2} = \frac{29^2 \cdot 29}{25^2} \Longrightarrow r = \frac{29\sqrt{29}}{25}$$

3) $y^2 = x^3 - 4x^2 + 4x$ az (1,1) pontban

4) $\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases}$ a paraméter $t = 0$ értékénél

Az egyes paraméter szerinti deriváltak:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4\cos t \qquad \dot{y} = -2\sin t \\ \ddot{x} &= -4\sin t \qquad \ddot{y} = -2\cos t \end{aligned}$$

$t = 0$ értékét behelyettesítve $\dot{x} = 4$, $\dot{y} = 0$, $\ddot{x} = 0$, és $\ddot{y} = -2$. Ezeket beírva megkapjuk a simulókör paramétereit:

$$a = 0 - \frac{(16+0)\cdot 0}{-8} = 0$$

$$b = 2 + \frac{(16+0)\cdot 4}{-8} = 2 - 8 = -6$$

$$r = \frac{(16+0)^{\frac{3}{2}}}{-8} = \frac{64}{-8} = -8 \Longrightarrow G = \frac{1}{8}$$

5) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ a paraméter $t = \dfrac{\pi}{4}$ értékénél

A paraméter szerinti első deriváltak:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3a\cos^2 t\sin t \\ \dot{y} &= 3a\sin^2 t\cos t \end{aligned}$$

A paraméter szerinti második deriváltak:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 6a\cos t\sin^2 t - 3a\cos^3 t \\ \ddot{y} &= 6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t \end{aligned}$$

Ezek értékei $t = \frac{\pi}{4}$ esetében $\dot{x} = \frac{-3a\sqrt{2}}{4}$, $\dot{y} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$, $\ddot{x} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$, és $\ddot{y} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Ezeket a képletbe behelyettesítve (Hogy ne foduljon elő az a két különböző jelentésben, a simulókör paramétereit a_1-gyel, és b_1-gyel jelöljük.):

$$a_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{\frac{9a^2\cdot 2}{16}\frac{3a\sqrt{2}}{4}}{-\frac{9a^2\cdot 2}{16}} = a\sqrt{2}$$

$$b_1 = a\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\left(\frac{9a^2\cdot 2}{16}\cdot 2\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{9a^2\cdot 2}{16}} = \frac{3a}{2}$$

További feladatok

Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket!

1) $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$

Megoldás:

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- *Paritás, periodicitás:* paritása nincs, nem periodikus.
- *Folytonosság:* $x = 0$-ban szakadási helye van, máshol folytonos. A szakadási helyen vett határértékek:

$$\lim_{x \to 0+0} xe^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0-0} xe^{-\frac{1}{x}} = -\infty$$

- *Aszimptota egyenlete:*

$$m = \lim_{x \to \infty} = \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

$$c = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} -e^{-\frac{1}{x}} = -1$$

  Az aszimptota egyenlete tehát: $y = x - 1$.

- *Zérushely:* $xe^{-\frac{1}{x}} = 0$ egyenletnek nincs megoldása, hiszen $e^{-\frac{1}{x}} > 0 \, \forall \, x \in$ $\in \mathbb{R}$-re, és $x \neq 0$.
- *Szélsőértékek:*

  Az első derivált:

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + xe^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

  Ennek zérushelye akkor és csak akkor van, ha $x + \dfrac{1}{x} = 0$, vagyis ha $x = -1$.

  A második derivált:

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right) + e^{-\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^3}$$

  Ennek értéke az első derivált zérushelyénél: $f''(-1) = -e < 0$, vagyis ezen a helyen a függvénynek maximuma van, értéke $f(-1) = -1 \cdot e^1 =$ $= -e$.

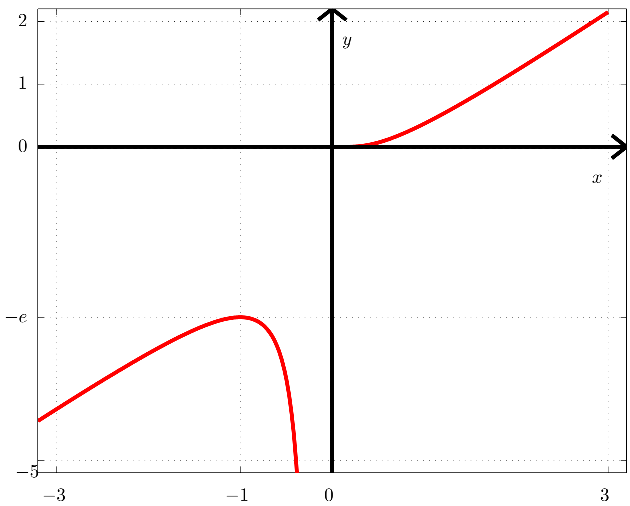
– *Monotonitás:*

- Szig. mon. nő, ha $f'(x) < 0$, ami akkor teljesül, ha
$$e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0$$
Mivel $e^{-\frac{1}{x}} > 0 \,\forall\, x \in \mathbb{R}$-re, ezért ezzel ekvivalens:
$$1+\frac{1}{x} > 0 \Longrightarrow \frac{x+1}{x} > 0$$
Ez akkor teljesül, ha $x > 0$, vagy $x < -1$.
- Szig. mon. csökken, ha $f'(x) < 0$. Ez azt jelenti, hogy $x + \frac{1}{x} < 0$, ami akkor teljesül (hasonlóan az előző esethez), ha $-1 < x < 0$.

– *Inflexió:*
A függvény második deriváltja:
$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^3}$$
Ennek az értelmezési tartományon nincs zérushelye, ezért a függvénynek nincs inflexiós pontja.

– *Konvexitás:*

- A függvény konvex, ha $f''(x) > 0$, vagyis ha $x > 0$.
- A függvény konkáv, ha $f''(x) < 0$, vagyis ha $x < 0$.



5. ábra. az $y = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ függvény képe

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n. é.	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	n. é.	$+$
$f(x)$	nő	max.	csökken	n. é.	nő
	konvex			n. é.	konkáv

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

- *Értelmezési tartomány:* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- *Paritás, periodicitás:* paritása nincs, nem periodikus.
- *Folytonosság:*

  Az $x = 1$ helyen szakadása van a függvénynek, az értelmezési tartomány többi pontjában folytonos. A szakadási hely két oldalán vett határértékek:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1+0} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^2 = \infty$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1-0} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^2 = \infty$$

  Emiatt az $x = 1$ egyenletű egyenes aszimptota.

- *Határértékek a végtelenben:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$$

  Az aszimptota egyenlete:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{(x-1)^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-2x+1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x}} = 0$$

$$c = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - \underbrace{mx}_{0}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$$

  Az aszimptota egyenlete tehát $y = 1$.

- *Tengelymetszetek:*

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$f(0) = \frac{0}{1} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

– *Szélsőérték, monotonitás:*
Az első derivált:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{(x-1)^2}\right)' = \frac{2x(x-1)^2 - x^2 2(-1)}{(x-1)^4} = \frac{-2x}{(x-1)^3}$$

Ennek zérushelye:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

A második derivált:

$$f''(x) = \frac{-2(x-1)^3 + 2x \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{(x-1)^2(-2(x-1)+6x)}{(x-1)^6} = \frac{2+4x}{(x-1)^4}$$

Ennek értéke az első derivált zérushelyénél: $f''(0) = 2 > 0$, vagyis itt a függvénynek minimuma van. A minimum értéke $f(0) = 0$

– *Monotonitás:*
Az első derivált:

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

- Szig. mon. csökken, ha $f'(x) < 0$. Ez két esetben teljesül:
  - Ha a számláló pozitív, a nevező negatív, azaz ha $x > 0$ és $1 - x < 0$ egyszerre teljesül. Innen $x > 1$ következik.
  - Ha a számláló negatív, a nevező pozitív, azaz ha $x < 0$ és $1 - x > 0$ egyszerre teljesül. Innen $x < 0$ következik.
- Szig. mon. nő, ha $f'(x) > 0$. Innen:
  - Ha a számláló és a nevező pozitív, $x > 0$ és $1 - x > 0$ egyszerre teljesül. Innen $0 < x < 1$ következik.
  - Ha a számláló és a nevező negatív, $x < 0$ és $1 - x < 0$ egyszerre teljesül. Ilyen valós szám nincs.

– *Inflexió, konvexitás:*
A második derivált zérushelye:

$$f''(x) = \frac{2+4x}{(x-1)^4} = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

A harmadik derivált:

$$f'''(x) = \frac{4(x-1)^4 - (2+4x)4(x-1)^3}{(x-1)^8} = \frac{(x-1)^3(4x-4-2-4x)}{(x-1)^8} = \frac{-6}{(x-1)^5}$$

Ennek értéke a második derivált zérushelyén:

$$f'''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

A függvény értéke az inflexiós pontban:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2} = \frac{1}{9}$$

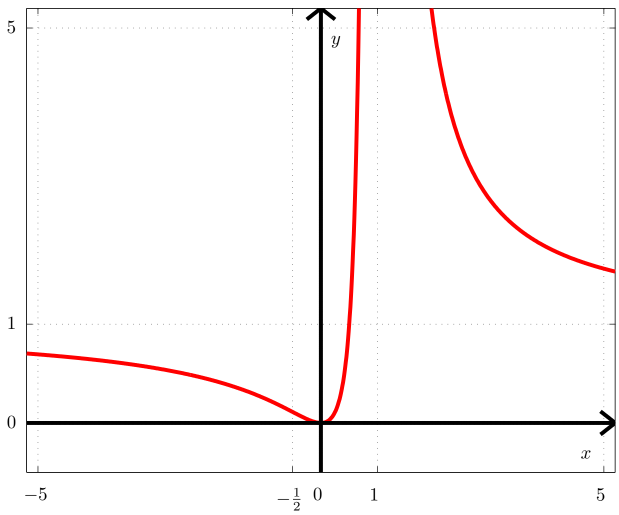
A függvény konvex, ha:

$$f''(x) > 0 \Longrightarrow 2+4x > 0 \Longrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

A függvény konkáv, ha:

$$f''(x) < 0 \Longrightarrow 2+4x < 0 \Longrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

<table>
<tr><td>x</td><td>$x < -\frac{1}{2}$</td><td>$x = -\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{1}{2} < x < 0$</td><td>$x = 0$</td><td>$0 < x < 1$</td><td>$x = 1$</td><td>$x > 1$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>n. é.</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$f''(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>n. é.</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f(x)$</td><td colspan="3">csökken</td><td>min.</td><td>nő</td><td>n. é.</td><td>csökken</td></tr>
<tr><td>konvex</td><td>infl.</td><td colspan="3">konkáv</td><td>n. é.</td><td>konkáv</td></tr>
</table>



6. ábra. az $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ függvény képe

Vizsgáljuk meg a következő függvényeket konvexitás szempontjából!

3) $f(x) = x + \sin x$

Megoldás:

Az első derivált:

$$f'(x) = 1 + \cos x$$

Ez a függvény $\forall x \in \mathbb{R}$-re nemnegatív, vagyis az eredeti függvény a teljes értelmezési tartományon ($D_f = \mathbb{R}$) monoton nő.

A második derivált:

$$f''(x) = -\sin x$$

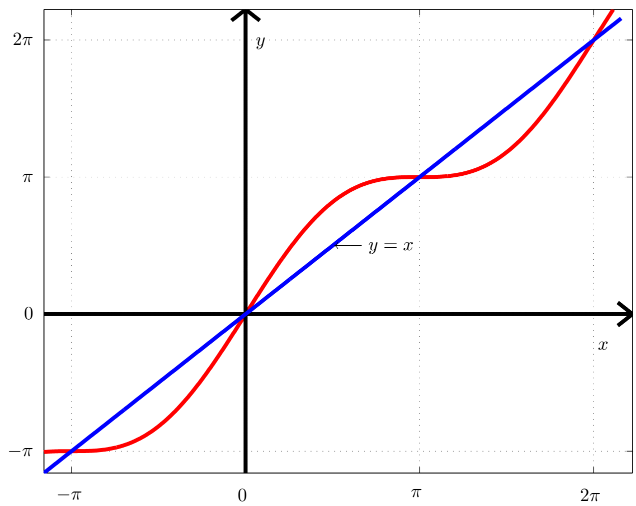
Ennek zérushelyei: $x = k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. A harmadik derivált $f'''(x) = -\cos x$, melynek értéke a második derivált zérushelyein $f'''(k\pi) = \mp 1 \neq 0$, vagyis az eredeti függvénynek az $x = k\pi$ helyeken inflexiós pontja van. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezen inflexiós pontok ráesnek az $y = x$ egyenletű egyenesre, hiszen $f(k\pi) = k\pi + \underbrace{\sin k\pi}_{0} = k\pi \Longrightarrow f(x_{\text{inflexió}}) = x_{\text{inflexió}}$.

Az inflexiós pontokban húzott inflexiós érintők meredeksége:

$$x = 0 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f'(x) = 1 + 1 = 2$$

$$x = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f'(x) = 1 - 1 = 0$$

A függvény grafikonja tehát:



7. ábra. az $y = x + \sin x$ függvény képe

4) $f(x) = \sqrt[3]{x^5} + 4x$

Megoldás:

Az első derivált:

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + 4$$

A második derivált:

$$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$$

Ebből látszik, hogy a második derivált negatív, ha $x < 0$, és pozitív, ha $x > > 0$. Mivel azonban $x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, ezért a második derivált nem értelmezett $x = 0$-ban.

$x = 0$-ban $\exists\, f'(x)$, és értéke $f'(0) = 4$. Ebből következően az f-nek $x = = 0$-ban van érintője és itt f konvexből konkávba megy át. Vagyis f-nek $x = 0$-ban inflexiós pontja van.

5) Írjuk fel az $y = \cos x$ függvény 4-edfokú Taylor-polinomját az $x = \frac{\pi}{6}$ helyen és a Taylor-formula maradéktagját!

Megoldás:

A szükséges deriváltak:

$$\begin{array}{ll}
y = \cos x & y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
y' = -\sin x & y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \\
y'' = -\cos x & y\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
y''' = \sin x & y'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \\
y^{(\mathrm{IV})} = \cos x & y^{(\mathrm{IV})}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{array}$$

A Taylor-sor és a maradéktag:

$$T_v(x) = \sum_{n=0}^{v} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$R_v(x) = \frac{f^{(v+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{v+1} \qquad \text{, ahol } x < \xi < x_0$$

Behelyettesítve a deriváltak megfelelő értékeit:

$$T_4(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{1!} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2}{2!} + \frac{1}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3}{3!} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4}{4!}$$

$$R_4(x) = \frac{-\sin\xi}{5!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5 \quad \text{, ahol } x < \xi < \frac{\pi}{6}$$

6) Ha $x \to \infty$, akkor a $\log_a x \quad (a > 1)$, $a^x \quad (a > 1)$, és $x^k \quad (k > 0)$ függvények is ∞-hez tartanak. Hasonlítsuk össze a három függvény értékét nagy x-ekre, azaz, ha lehet, állítsuk őket nagyság szerinti sorrendbe! (Ehhez számítsuk ki a hányadosaik határértékét!)

Megoldás:

Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két olyan egyváltozós valós függvény, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Ha $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c > 1$, akkor a határérték definíciója szerint $\exists\, x_0$, hogy $x > x_0$ esetén $\frac{f(x)}{g(x)} > 1$, azaz $f(x) > g(x)$. Hasonlóan ha $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c < 1$, akkor $\exists\, x_0$ szám, hogy $x > x_0$ esetén $f(x) < g(x)$. A feladatban lévő függvények hányadosainak határértékei (a L'Hospital szabály alkalmazását az egyenlőségjel fölé tett L betűvel jeleztük):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^k} \overset{\mathrm{L}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x\cdot\ln a}}{k \cdot x^{k-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln a \cdot k \cdot x^k} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{a^x} \overset{\mathrm{L}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k \cdot x^{k-1}}{a^x \cdot \ln a} \overset{\mathrm{L}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k(k-1)\,x^{k-2}}{a^x \cdot (\ln a)^2} \overset{\mathrm{L}}{=} \cdots \overset{\mathrm{L}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k!}{a^x \cdot (\ln a)^{k+1}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{a^x} \overset{\mathrm{L}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x\cdot\ln a}}{a^x \cdot \ln a} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \cdot a^x \cdot \ln^2 a} = 0$$

Tehát a reciprokokra:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{\log_a x} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^k} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{\log_a x} = \infty$$

Ezek szerint $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$, hogy $x > x_0$ esetén

$$\log_a x < x^k < a^x.$$

7) Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvényeknek van-e szélsőértékük az $x = 0$ pontban!

a) $y = x^2 - x^4$

Megoldás:

Az első derivált és zérushelye:

$$y' = 2x - 4x^3 = 2x\left(1 - 2x^2\right) \qquad y'(0) = 0$$

$$y'' = 2 - 12x \quad y''(0) = 2 > 0,$$

vagyis $x = 0$-ban a függvénynek minimuma van.

b) $y = \cos x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}$

Megoldás:

Az első derivált:

$$y' = -\sin x + x^2 + x$$

Ennek a zérushelye $x = 0$. A második derivált:

$$y'' = -\cos x + 2x + 1$$

Ennek értéke az első derivált zérushelyén $y''(0) = 0$, vagyis tovább kell vizsgálni a függvényt.

A harmadik derivált:

$$y''' = \sin x + 2$$

Ennek értéke $x = 0$-ban $y'''(0) = 2 > 0$, vagyis itt a függvénynek inflexiós pontja van.

8) Írjuk fel az e^{-x} függvény $x_0 = 0$ ponthoz tartozó n-edik MacLaurin-polinomját, és a formula maradéktagját!

Megoldás:

Az első néhány derivált értéke a $x_0 = 0$ pontban:

$$\begin{array}{ll} y = e^{-x} & y(0) = 1 \\ y' = -e^{-x} & y'(0) = -1 \\ y'' = e^{-x} & y''(0) = 1 \\ y''' = -e^{-x} & y'''(0) = -1 \end{array}$$

Innen látszik, hogy

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } k \text{ páros} \\ -1 & \text{, ha } k \text{ páratlan} \end{cases}$$

A MacLaurin-sor tehát:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \text{, ahol } 0 < \Theta < 1$$

Behelyettesítve a deriváltak értékét:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k + \underbrace{\frac{(-1)^{n+1} e^{-\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}}_{R_n(x) \text{ maradéktag}} \text{, ahol } 0 < \Theta < 1$$

9) Tekintsük az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ polinomfüggvényt. Vizsgáljuk meg a következő kérdéseket.

- Hol metszi az f függvény az x, illetve az y tengelyt?
- Hol veszi fel az f függvény a helyi szélsőértékeit, illetve milyen intervallumokon növekvő vagy csökkenő?
- Milyen intervallumon konvex vagy konkáv a függvény?

Vegyük sorra a kérdéseket. Probálgatással megkapjuk, hogy $x = 1$ gyöke az $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ polinomnak. Ha az kiemelünk $x - 1$-et az $x^3 - 6x^2 + 11x - - 6$-ból akkor kapjuk, hogy $f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$. Tehát az f függvény másik két zérus helye az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenlet gyökei: $x = 2$ és $x = 3$. Tehát az f függvény az $x = 1$, $X = 2$, $X = 3$ pontokban fogja metszi az x tengelyt. Az f az y tengelyt az $y = f(0) = -6$ pontban metszi.

Az f függvény helyi szélsőértékeit az $f'(x) = 0$ egyenlet gyökei között kell keressük.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

Az $3x^2 - 12x + 11 = 0$ egyenlet gyökei: $x = \frac{6-\sqrt{3}}{3}$ és $x = \frac{6+\sqrt{3}}{3}$. Ahhoz, hogy megmondjuk, hogy ezek helyi mimnimumok vagy maximumok ki számítjuk $f''(x)$-et:

$$f''(x) = 6x - 12.$$

Mivel $f''(\frac{6-sqrt3}{3}) = -2\sqrt{3} < 0$ ezért $x = \frac{6-\sqrt{3}}{3}$ pont az f függvénynek helyi maximuma. Továbbá mivel $f''(\frac{6+\sqrt{3}}{3}) = 2\sqrt{3} > 0$ ezért az $x = \frac{6+\sqrt{3}}{3}$ pont helyi minimum pont.

Mivel az f' a $(-\infty, \frac{6-\sqrt{3}}{3})$ és a $(\frac{6+\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ intervallumon pozitív ezért ezeken az intervallumokon az f növekvő. Az $(\frac{6-\sqrt{3}}{3}, \frac{6+\sqrt{3}}{3})$ intervallumon az f' negatív ezért ezen az intervallumon az f csökkenő.

Megvizsgáljuk, hogy hol lesz pozitív, illetve negatív az f''-t. Könnyen kapjuk, hogy csak az $x = 2$ pontban lesz nulla az $f''(x)$ és a $(-\infty,2)$ intervallumon negatív az $f''(x)$, illetve az $(2, +\infty)$ intervallumon pozitív az $f''(x)$. Tehát az f az $(-\infty,2)$ intervallumon konkáv és a $(2, +\infty)$ intervallumon konvex az f.