Matematika ÉP2
Térgörbék, 9. és 10. gyakorlat
2013/14. tavaszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Fogalmak

A térbeli görbéket egy t paramétertől függő térbeli vektorral írjuk le. Úgy képzelhetjük, hogy a térgörbe egy a 3 dimenziós térben mozgó pont pályája (a mozgás egyszerű). Rögzítsük tehát az origóból kiinduló $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ páronként merőleges egységvektorokat. Ekkor egy az origóból kiinduló vektort a következőképpen adhatunk meg:

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}, \text{ vagy}$$
$$\underline{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] \,.$$

A paraméter jelölésére azért a t betűt használjuk (t=tempus), mert úgy gondolhatjuk, hogy $r(t)$ nem más, mint a mozgó pont pozíciója t időpontban. Matematikai szempontból az $\underline{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ skalár változótól függő vektor értékű függvény. Erre a függvényosztályra a függvénytanban tanult fogalmak és módszerek könnyen átültethetőek. A következőkben feltesszük, hogy az $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ függvények mindenféle jó tulajdonsággal rendelkeznek, például legalább háromszor differenciálhatóak.

Derivált

Az $\underline{r}(t)$ görbe t_0 pontbeli deriváltja az egyváltozós esethez hasonlóan definiálható. Azaz esetünkben

$$\dot{\underline{r}}(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)] \,.$$

Tehát a deriváltat itt a fizikában megszokott módon ponttal jelöljük. A görbét definiáló $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény t_0 pontbeli érintőjének irányvektora az $\dot{r}(t_0) = [\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)]$ derivált. Tehát az $\underline{r}(t)$ görbe $\underline{r}(t_0) = [x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$ pontbeli *érintőegyenesének egyenlete:*

$$\underline{e}(t) = \underline{r}(t_0) + \dot{\underline{r}}(t_0)\cdot t = [x(t_0) + \dot{x}(t_0)\cdot t, y(t_0) + \dot{y}(t_0)\cdot t, z(t_0) + \dot{z}(t_0)\cdot t] \,,$$

ahol $-\infty < t < \infty$.

Az *első derivált fizikai jelentése:* Ha egy térbeli pont mozgását az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény írja le, akkor a mozgó pont sebessége a t_0 időpillanatban $\dot{\underline{r}}(t_0)$.

A *második derivált fizikai jelentése:* Ha egy térbeli pont mozgását az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény írja le, akkor a mozgó pont gyorsulása a t_0 időpillanatban $\ddot{\underline{r}}(t_0)$. (*Megjegyzés:* A gyorsulsávektor érintőirányú komponense a tangenciális gyorulás, míg az erre merőleges komponene a centripetális gyorsulás.)

Ívhossz

Az $\underline{r}(t)$ görbének az $\underline{r}(t_1)$ és $\underline{r}(t_2)$ pontok közötti darabjának *ívhossza*

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\underline{r}}(t)|\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\mathrm{d}t.$$

Ha az $\underline{r}(t)$ görbére úgy tekintünk, mint egy mozgó pont pályájára, akkor a $\underline{v} = \dot{\underline{r}}(t)$ sebesség abszolút értéke $|\dot{\underline{r}}(t)|$ és a t_1, t_2 időpontok között megtett út épp a fenti s.

Megjegyzés: Ha egy pont úgy mozog a görbén, hogy a sebességének abszolút értéke minden időpillanatban $|\dot{\underline{r}}(t)| = 1$, akkor a t idő alatt megtett út $s = t$. Az így választott paraméterezést hívjuk ívhossz szerinti paraméterezésnek.

Görbület

A görbülettel a térgörbének az egyenestől való elhajlását mérjük. Olyan mennyiséget akarunk bevezetni, amely nem függ a görbe paraméterezésétől, csak a görbére jellemző. Így az $\underline{r}(t)$ görbe t paraméterű pontjában a görbület:

$$G = \frac{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|}{|\dot{\underline{r}}(t)|^3}.$$

Kísérő triéder

A *kísérő triéder* (vagy három él) vektorai:

1. Az érintő irányú egységvektort (érintővektort) $\underline{t}$-vel jelöljük és

$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}(t)}{|\dot{\underline{r}}(t)|}.$$

2. A binormális vektor a $\underline{t}$ érintővektorra és az $\underline{n}$ főnormálisra egyaránt merőleges és velük jobbrendszert alkotó egységvektor.

$$\underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)}{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|}.$$

3. A centripetális gyorsulás (a gyorsulásvektor érintőriányú komponensére merőleges vektor) egységvektort főnormálisnak nevezzük és $\underline{n}$-nel jelöljük. Ekkor

$$\underline{n} = \underline{b} \times \underline{t}.$$

A sebesség- és gyorsulásvektor által meghatározott síkot *simulósíknak* nevezzük. A simulósík tehát az $\dot{\underline{r}}(t)$ és $\ddot{\underline{r}}(t)$ vektorok által meghatározott sík. Tartalmazza a $\underline{t}$ és $\underline{n}$ vektorokat. A simulósík normálisa a $\underline{b}$ binormális egységvektor.

A *normálsík* a görbére merőleges sík. Normálisa tehát az $\dot{\underline{r}}(t)$ érintővektor. A normálsík tartalmazza az $\underline{n}$ normális és $\underline{b}$ binormális vektorokat.

A *rektifikáló sík* a $\underline{t}$ és $\underline{b}$ vektorok által meghatározott sík. Normálisa az $\underline{n}$ főnormális vektor.

Torzió

A torzióval a térgörbének a síkgörbétől való elhajlását mérjük. Most is olyan mennyiséget akarunk bevezetni, amely nem függ a görbe paraméterezésétől, csak a görbére jellemző. Így az $\underline{r}(t)$ görbe t paraméterű pontjában a torzió:

$$T = \frac{\dot{\underline{r}}(t)\ddot{\underline{r}}(t)\dddot{\underline{r}}(t)}{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|^2}.$$

Megjegyzés: A torzió képletének számlálójában a három vektor vegyesszorzata szerepel (azaz $\underline{abc} = (\underline{a} \times \underline{b})\underline{c}$).

A térgörbe görbülete mindig nemnegatív szám. Ezzel szemben a torzió előjeles mennyiség. A torzió pozitív, ha a görbe jobbra csavarodik és negatív, ha balra. Egy síkgörbe torziója zérus.

2. Feladatok

1. Írja fel az alábbi térgörbék adott pontbeli érintőegyensének egyenletét!

   (a) $\underline{r}(t) = (t-3)\underline{i} + (t^2+1)\underline{j} + t^2\underline{k}, \quad t = 2$ (b) $\underline{r}(t) = \sin t\underline{i} + \cos t\underline{j} + \frac{1}{\cos t}\underline{k}, \quad t = 0$

   (c) $\underline{r}(t) = 2t\underline{i} + \frac{2}{t}\underline{j} + t^2\underline{k}, \quad t = 2$ (d) $\underline{r}(t) = \dfrac{t}{1+t}\underline{i} + \dfrac{1+t}{t}\underline{j} + t^2\underline{k}, \quad t = 1$

2. Számolja ki az alábbi térgörbék adott szakaszának ívhosszát!

   (a) $\underline{r}(t) = 3\cos t\underline{i} + 3\sin t\underline{j} + 2t\underline{k}, \quad 0 \le t \le 4\pi$ (b) $\underline{r}(t) = t\cos t\underline{i} + t\sin t\underline{j} + 3t\underline{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

   (c) $\underline{r}(t) = at\underline{i} + \sqrt{3ab}t^2\underline{j} + 2bt^3\underline{k}, \quad 0 \le t \le 1$ (d) $\underline{r}(t) = e^{at}\cos t\underline{i} + e^{at}\sin t\underline{j} + be^{at}\underline{k}, \quad -\infty \le t \le 0$

   (e) $\underline{r}(t) = t^2\underline{i} + 2t^6\underline{j} + \sqrt{3}t^4\underline{k}, \quad -1 \le t \le 2$ (f) $\underline{r}(t) = \dfrac{\cos t}{\text{ch } t}\underline{i} + \dfrac{\sin t}{\text{ch } t}\underline{j} + (t - \text{th } t)\underline{k}, \quad 0 \le t \le 10$

   (g) $\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (\sqrt{2}t + 3)\underline{j} + 3t^2\underline{k}, \quad 0 \le t \le 1$ (h) $\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1-t)\underline{k}, \quad 0 \le t \le 2$

3. Számolja ki az alábbi térgörbék adott pontjában a kísérő triédert, illetve adja meg a simulósík, a normálsík és a rektifikálósík egyenletét! Emellett számolja ki a megadott pontban a görbületet és a torziót!

   (a) $\underline{r}(t) = (3t^2 - 3t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1-t)\underline{k}, \quad t = 2$ (b) $\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t+3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}, \quad t = -1$

   (c) $\underline{r}(t) = \dfrac{t^4}{4}\underline{i} + \dfrac{t^3}{3}\underline{j} + \dfrac{t^2}{2}\underline{k}, \quad t = 1$ (d) $\underline{r}(t) = (3t+7)\underline{i} + (2t^2+8)\underline{j} + \frac{1}{6}t^3\underline{k}, \quad t = 1$

   (e) $\underline{r}(t) = (t^3 - 2t)\underline{i} + (3t+2)\underline{j} + (t^2 - 5)\underline{k}, \quad t = 1$ (f) $\underline{r}(t) = \cos^2 t\underline{i} + \cos t\sin t\underline{j} + \sin^2 t\underline{k}, \quad t = \frac{\pi}{6}$

4. Határozza meg, hogy mekkora szöget zár be az $\underline{r}(t) = (2t^3, 3t^2, -6t)$ térgörbe $t = 2$ pontbeli simulósíkja az xz-síkkal!

5. Határozza meg az $\underline{r}(t) = (\cos t, t\sin t, (t + 6\sin t))$ térgörbe görbületét a $t = \frac{3\pi}{2}$ pontban!

6. Határozza meg az $\underline{r}(t) = (t, e^{(t+1)^2}, e^{2t+2})$ térgörbe görbületét a $t = -1$ pontban!

7. Tekintsük az $\underline{r}(t) = (t, t, \sqrt{2}\text{ch } t)$ görbét a $[0, \infty)$ intervallumon. Mely pontban lesz a görbülete $\sqrt{2}$

8. Határozza meg azokat a pontokat, ahol az $\underline{r}(t) = (t^2, t\cos t, t\sin t), \quad t \ge 0$ görbe érintője merőleges az xy-síkra!

9. Határozza meg azokat a pontokat, ahol az $\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi$ görbe érintője merőleges lesz az $x + y + z = 1$ síkra!

10. Tekintsük az $\underline{r}(t) = (t, t, \text{sh } t)$ görbét a $(-\infty, \infty)$ intervallumon. Mely pontokban lesz a görbe érintője merőleges az $x + y + z = 1$ síkra?

11. Határozza meg mekkora szöget zár be az $\underline{r}(t) = (2t^3, 3t^2, -6t)$ térgörbe $t = 2$-beli érintője az xz-síkkal!

12. Adja meg az $\underline{r}(t) = (t \cos t, -t \sin t, at)$ térgörbe simulósíkjának egyenletét a koordinátarendszer kezdőpontjában!

13. Adja meg az $\underline{r}(t) = (2t, \ln t, t^2)$ térgörbe görbületét és torzióját!