

# Matematika ÉP2

## Kétváltozós függvények deriválása, 7. gyakorlat

### 2013/14. tavaszi félév

## 1. Elméleti összefoglaló

### Lokális szélsőértékek

Legyen  $f$  függvény egy olyan tartományon definiálva, melynek  $(x_0, y_0)$  belső pontja.  $(x_0, y_0)$  lokális maximum/minimum hely, ha van olyan  $(x_0, y_0)$  középpontú nyílt körlap, melyben minden értelmezési tartomány beli pont függvényértéke kisebb vagy egyenlő/nagyobb vagy egyenlő  $f(x_0, y_0)$ -nál. A továbbiakban feltételezzük, hogy  $f$  értelmezési tartománya egy nyílt  $T$  halmaz és  $f$  elsőrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak a  $T$  nyílt halmazon, aminek eleme  $(x_0, y_0)$ .

*Kritikus pontnak* nevezzük a  $T$  értelmezési tartomány azon pontjait, melyekben mindkét elsőrendű parciális derivált nulla.

*Nyeregpontra* nevezzük a  $T$  értelmezési tartomány azon  $(x_0, y_0)$  pontjait, melyekben mindkét elsőrendű parciális derivált nulla és minden  $(x_0, y_0)$  középpontú nyílt körlapon van olyan pontja az értelmezési tartománynak, melynek függvényértéke kisebb az  $f(x_0, y_0)$  értéknél, és van olyan is, melynek nagyobb.

*Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele:* Ha  $(x_0, y_0)$ -ban lokális szélsőértéke van  $f$ -nek, akkor itt  $f'_x(x_0, y_0) = 0$  és  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ .

*Lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele:* Ha  $f'_x(x_0, y_0) = 0$  és  $f'_y(x_0, y_0) = 0$  és  $f$  második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak az  $(x_0, y_0)$ -t tartalmazó nyílt  $T$  halmazon, akkor

1. Ha  $\det \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0$  és  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , akkor  $f$ -nek  $(x_0, y_0)$ -ban lokális minimuma van és ez a minimum érték  $f(x_0, y_0)$ .
2. Ha  $\det \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0$  és  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ , akkor  $f$ -nek  $(x_0, y_0)$ -ban lokális maximuma van és ez a maximum érték  $f(x_0, y_0)$ .
3. Ha  $\det \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} < 0$ , akkor  $f$ -nek  $(x_0, y_0)$ -ban nyeregpontja van.

### Abszolút szélsőértékek

Ha a folytonos  $f(x, y)$  korlátos és zárt halmazon értelmezett, akkor ott felveszi a maximumát és minimumát. Ezen most *abszolút maximumot*, vagy *abszolút minimumot* értünk. Az abszolút szélsőérték megkeresésének menete a következő:

- A tartomány belsejében megnézzük a lehetséges szélsőérték helyeket.
- A tartomány határán megnézzük a lehetséges szélsőérték helyeket.
- Kiszámoljuk az előzőekre a függvényértékeket és kiválasztjuk közülük a legnagyobbat és a legkisebbet.

### Feltételes szélsőértékek

Adott feltételek melletti lokális szélsőértékek, azaz a *feltételes lokális szélsőértékek* kiszámításának fontos ötlet a Lagrange-multiplikátoros módszer. Ha az  $f(x, y)$ -t szeretnénk minimalizálni egy  $g(x, y) = 0$  feltétel mellett, akkor ez ugyanaz, mintha a

$$h(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

függvényt minimalizálnánk minden feltétel nélkül ( $\lambda$  a Lagrange multiplikátor). Ha a  $h$  függvény mindhárom parciális deriváltját egyenlővé tesszük 0-val, akkor az így kapott egyenletrendszerből meghatározhatjuk a lokális feltételes szélsőértékeket.

## 2. Feladatok

1. Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvényeknek hol lehet lokális szélsőértéke, van-e, s ha létezik, akkor minimum vagy maximum!

(a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$

(b)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 3x - y + 5$

(c)  $f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$

(d)  $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 - 1$

(e)  $f(x, y) = x^2 y^3 (6 - x - y)$

(f)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

(g)  $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$

(h)  $f(x, y) = (x - y + 1)^2 - (x^2 - 2)^2$

(i)  $f(x, y) = xy(x + 8)(y - 6)$

(j)  $f(x, y) = (x^3 - 9)(y^2 + 4y)$

(k)  $f(x, y) = x^3 y^2 (4 - x - y)$

(l)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$

(m)  $f(x, y) = \cos x \cos y \cos(x + y)$

2. Ossa fel a 12-t három részre úgy, hogy a három szám szorzata maximális legyen!
3. Egy derékszögű hasáb egy csúcsába összefutó éleinek összege 45 cm. Hogyan kell az éleket megválasztani, hogy a hasáb térfogata maximális legyen?
4. Téglatest alakú, felül nyitott  $4 m^3$  térfogatú tartályt akarunk készíteni a lehető legkevesebb anyag felhasználásával. Mekkoraak legyenek a téglatest élei?
5. Ossa fel a 18-at három részre úgy, hogy az első rész négyzetének, a második rész köbének és a harmadik résznek a szorzata maximális legyen!

6. Mikor a legnagyobb a 400 méter kerületű szimmetrikus trapéz alakú telek területe? (Mekkorák a szárjai és a hosszabbik alapon fekvő szögei?)
7. Határozza meg az  $f(x, y) = 12 - x^2 - 36y^2$  egyenletű felület  $z \geq 0$  része és az  $xy$  sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest éleit, ha a test lapjai párhuzamosak a koordinátságokkal!
8. Határozza meg az  $f(x, y) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$  egyenletű ellipszoidba írható maximális térfogatú téglatest éleit, ha a téglatest lapjai párhuzamosak a koordinátságokkal!
9. Határozza meg az  $f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$  függvény legkisebb és legnagyobb értékét az  $x = 0$ ,  $y = 0$  és  $x + y = 6$  egyenesekkel határolt zárt tartományban!
10. Határozza meg a következő kétváltozós függvények előírt feltételek mellett vett feltételes szélsőértékét!
- (a)  $f(x, y) = xy$  feltétel:  $x + y - 1 = 0$
- (b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  feltétel:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
- (c)  $f(x, y) = x^2 - y^2$  feltétel:  $3x + 2y + 5 = 0$
- (d)  $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$  feltétel:  $x - y = \frac{\pi}{4}$
11. Határozza meg a  $\sin x \sin y \sin z$  szorzat maximumát, ha  $x, y, z$  egy háromszög szögei!