

Matematika ÉP2

Elsőrendű differenciálegyenletek, 3. és 4. gyakorlat 2013/14. tavaszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Mik is azok a differenciálegyenletek?

A mindennapi életben lejátszódó mozgásokat, folyamatokat és jelenségeket függvényekkel lehet leírni. Olyan egyenleteket írhatunk fel, amelyekben a folyamatot leíró függvény és annak valahányad rendű deriváltjai szerepelnek. Az ilyen függvényegyenleteket differenciálegyenleteknek nevezzük és célunk a megoldásfüggvény megtalálása. Az egyenletben szereplő legmagasabb derivált rendjét a differenciálegyenlet *rendjének* hívjuk. A differenciálegyenlet *általános megoldása* nem más, mint az összes megoldást tartalmazó halmaz. Általában ezt az általános megoldást keressük. Ugyanakkor vannak feladatok, melyekben egy további, úgynevezett kezdeti feltételt kielégítő, *partikuláris megoldást* keresünk. Egy differenciálegyenletet a hozzá tartozó kezdeti feltételekkel együtt *Cauchy-feladatnak* vagy *kezdetiérték-problémának* nevezzük.

A differenciálegyenletekkel kapcsolatosan felmerülő kérdéseink egyike, hogy milyen feltételekkel létezik egyáltalán megoldás, és ha ezt már tisztáztuk, akkor mikor mondhatjuk, hogy ez a megoldás egyértelmű. Mivel a differenciálegyenletek csak közelítik a valóságot, de sosem írják le pontosan, így nem hivatkozhatunk arra, hogy a megoldás azért létezik és egyértelmű, mert konkrét jelentéssel bír a gyakorlatban. Ugyanakkor pontos matematikai tételek léteznek azzal kapcsolatban, hogy mely feltételek teljesülése esetén lesz a Cauchy feladatnak egyértelmű megoldása. A továbbiakban feltesszük, hogy a függvényeink kellően "szépek", és a megoldás létezését nem vitatjuk.

Elsőrendű szétválasztható változójú (szeperálható) differenciálegyenletek

Egy differenciálegyenletet elsőrendű szétválasztható változójú egyenletnek hívunk, ha felírható a következő alakban:

$$y' = f(x)g(y)$$

A megoldás menete: Először megkeressük azokat az azonosan konstans y függvényeket, melyekre $g(y) = 0$. Ezek megoldások. A következő lépésben felírjuk, hogy

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

majd pedig szeparáljuk az x -et és y -t tartalmazó függvényeket az egyenlet két különböző oldalára. Ezt követően integrálunk, azaz felírjuk, hogy

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx.$$

Ha mindkét oldal integrálható, akkor x és y között kapunk egy összefüggést, amelyből jó esetben kifejezhető y . (Amennyiben Cauchy-feladatot kell megoldani, úgy a partikuláris megoldás meghatározására ezen lépés után van lehetőség.)

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Egy differenciálegyenletet elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletnek hívunk, ha felírható a következő alakban:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Ha a fenti egyenlet jobb oldalán $q(x) \equiv 0$, akkor homogén elsőrendű lineáris differenciálegyenletünk van. Ez pontosan a következő alakot jelenti: $y' + p(x)y = 0$.

Megoldás menete: Az inhomogén egyenlet megoldása két részből áll. Előbb megkeressük homogén egyenlet általános megoldását, majd ezt követi az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának megkeresése az állandók variálásának módszerével. Azaz

$$y_{\text{IH, Á}} = y_{\text{H, Á}} + y_{\text{IH, P}}.$$

A homogén egyenlet megoldása mindig egy szeparálható differenciálegyenlet, aminek persze az $y \equiv 0$ megoldása, így keressük a többit. Előbb tehát szeparáljuk a változókat, majd integrálunk, végül kifejezzük y -t és azt kapjuk, hogy

$$y_{\text{H, Á}} = C e^{-\int p(x) dx},$$

ahol $C \in \mathbb{R}$.

Ezt követően az eredeti inhomogén egyenlet egy partikuláris (nem általános) megoldását a következő alakban keressük: $y_{\text{IH, Á}} = C(x)y_{\text{H, Á}}$, ahol a $C(x)$ valós függvényt úgy számoljuk ki, hogy az $y_{\text{IH, Á}}$ -t visszahelyettesítjük az eredeti inhomogén egyenletbe. Ezek után kapjuk, hogy

$$y_{\text{IH, P}} = e^{-\int p(x) dx} \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx.$$

(Amennyiben itt is Cauchy-feladatot kell megoldani, úgy a végső megoldás meghatározására ezen lépés után van lehetőség.)

2. Feladatok

1. Határozza meg a következő szétválasztható változójú differenciálegyenletek általános megoldását!

(a) $y^2 - 1 = (2y + xy)y'$ (b) $2(xy + x - y - 1) = (x^2 - 2x)y'$

(c) $\sqrt{1 - y^2} = y'\sqrt{1 + x^2}$ (d) $(x + xy^2)y' = 3$

(e) $\sqrt{1 - y^2} = y'(1 - x^2)$ (f) $(4 - x^2)e^{2y} \cdot y \cdot y' = x - 1$

(g) $(x + xy^2)y' = 3$ (h) $(x^2 - 1)(y^2 + 1)^{-2} \cdot y \cdot y' = 1$

(i) $yy' = x^2y + 4y - x^2 - 4$ (j) $\sqrt{25 - x^2} \cos^2 y \cdot y' = 1$

2. Határozza meg a következő Cauchy feladatok megoldását (szétválasztható változójú egyenletek)!

(a) $y \cdot y' = \frac{e^x}{1 + e^x}$, $y(1) = 1$ (b) $(x + 1)y' = y - 2$, $y(-3) = 1$

(c) $(x^2 - 1)y' = xy$, $y(\sqrt{2}) = -1$ (d) $y \ln y dx + x dy = 0$, $y(1) = 1$

3. Keresse meg a $2y'(x+4) + y = 0$ differenciálegyenletnek azt a megoldásgörbét, amely alatti terület 20 területegység a $0 \leq x \leq 12$ intervallumban!

4. Szórjunk m tömegű anyagot oldószerbe. az oldódás sebessége a még fel nem oldódott anyag mennyiségével arányos, azaz az oldódást leíró differenciálegyenlet $\frac{dx}{dt} = k(m-x)$, ahol x jelöli a t idő alatt feloldódott anyag mennyiségét, k arányossági tényező. Ha 1 perc alatt az anyag 20%-a oldódik fel, akkor 3 perc alatt hány százaléka? (Azaz $x(0) = 0$, $x(1) = 0,2m$, $x(3) = ?$.)

5. Az $y' = 3(x-1)^2 y$ differenciálegyenletet kielégítő y függvénynek mennyi lesz az értéke a 2 helyen, ha $y(1) = 1$?

6. Mennyi lesz az y függvény értéke az $x = 0$ pontban, ha tudjuk, hogy y kielégíti a $y' = \frac{\cos^2 y}{a+x^2}$ differenciálegyenletet és $y(1) = 0$?

7. Az $y' = (x-1)^2 \cos^2 y$ differenciálegyenletet kielégítő y függvénynek mennyi lesz az értéke a 2 helyen, ha $y(1) = 0$?

8. Az $y' = (y^2 + 1) e^{-2x}$ differenciálegyenletet kielégítő y függvénynek mennyi lesz az értéke a 1 helyen, ha $y(0) = 0$?

9. Határozza meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenletek általános megoldását!

(a) $y' + xy - x = 0$

(b) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$

(c) $y' = xy + x^3$

(d) $y' + y \ln x = 6e^{2x}$

(e) $(x^2 + 4) y' - 2xy = (x^2 + 4)^2 \cos x$

(f) $\cos x \cdot y' = \sin x \cdot y + \cos^2 x$

(g) $y' + 3 \tan x \cdot y = c \cos^4 x$

10. Határozza meg a következő Cauchy feladatok megoldását (elsőrendű lineáris egyenletek)!

(a) $y' \cos x + y \sin x = 1$, $y(0) = 1$

(b) $xy' - 2y = x^3 e^x$, $y(1) = 2$

(c) $xy' + 2y = x^4$, $y(1) = -2$

(d) $y' + x^2 y = x^2$, $y(2) = 1$

(e) $y' + y \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$, $y(0) = 3$