Matematika ÉP2
Komplex számok, 1. gyakorlat
2013/14. tavaszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Komplex számok algebrai és trigonometrikus alakja

A z komplex szám algebrai alakja $z = x + yi$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$ és $i^2 = -1$. x a komplex szám valós része ($Re(z) = x$), míg y a képzetes rész ($Im(z) = y$). A komplex szám abszolút értéke $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, míg a konjugáltja $\overline{z} = x - yi$. A komplex számoknak geometriai reprezentációja is van, mégpedig az xy-sík $P(x, y)$ pontja, vagy az xy-síkban az origóból a $P(x, y)$ pontba mutató $\overrightarrow{OP}$ vektor. Amennyiben φ-vel jelöljük az x tengely és az $\overrightarrow{OP}$ vektor által bezárt szöget, illetve r-rel az $\overrightarrow{OP}$ vektor hosszát, akkor felírhatjuk a komplex számok trigonometrikus alakját: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Itt az r és φ paraméterek a következő módon számolhatóak:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Műveletek algebrai és trigonometrikus alakban

Tekintsük a z_1 és z_2 komplex számokat, melyek algebrai és trigonometrikus alakja a következő: $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, illetve $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

1. *Összeadás, kivonás:* Csak ALGEBRAI alakban végezhető el. (A valós és képzetes részekre külön-külön elvégezzük az összeadást/kivonást.)

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i$$

2. *Szorzás:* ALGEBRAI és TRIGONOMETRIKUS alakban is elvégezhető.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

3. *Osztás:* ALGEBRAI és TRIGONOMETRIKUS alakban is elvégezhető. (Algebrai alakban a nevező konjugáltjával bővítünk.)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

4. *Hatványozás:* Csak TRIGONOMETRIKUS alakban végezhető el.

$$z^n = r^n \left[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right]$$

5. *n-edik gyökvonás:* Csak TRIGONOMETRIKUS alakban végezhető el.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots n-1$$

Megjegyzés: Az algebra alaptétele alapján a komplex számok körében minden n-edfokú $a_n z^n + an - 1z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ alakú egyenletnek pontosan n darab gyöke van, amennyiben az m-szeres gyököket multiplicitással (azaz m-szer) számoljuk.

2. Feladatok

1. Számolja ki a következő komplex számok esetében a $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $z_1(z_2 - z_1)$; $\frac{z_2^2}{\overline{z_1}}$; $z_1^3 \cdot z_2$; illetve $\frac{z_1^2}{\overline{z_2}}$ értékeket!

   (a) $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = -3i + 4$ (b) $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 + i$

   (c) $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -i$ (d) $z_1 = -i + 2$, $z_2 = -4 + 7i$

2. Hozza algebrai alakra a következő kifejezéseket!

   (a) $(1 + 6i) - i(-4 + 5i)$ (b) $(1 + i)\overline{(2 - 3i)}$ (c) $\overline{(2 + i)}(4 - 7i)$

   (d) $\frac{2 + 4i}{3 - 2i}$ (e) $\frac{1}{(1 - i)^2}$ (f) $\frac{2 + i}{i(1 - 4i)}$

   (g) $4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (h) $3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ (i) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

3. Számolja ki a következő komplex számok esetében a $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\frac{z_2^2}{\overline{z_1}}$; $z_1^3 \cdot z_2$; $\frac{z_1^2}{\overline{z_2}}$; z_2^{10} illetve z_1^{-10} értékeket! (az eredményeket elég trigonometrikus alakban megadni, de fontos a főargumentum, azaz $\varphi \in [0; 2\pi)$)

   (a) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ és $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

   (b) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ és $z_2 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

   (c) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ és $z_2 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

4. Írja fel a következő komplex számok trigonometrikus alakját!

   (a) $z = 1 + i\sqrt{3}$ (b) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ (c) $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

   (d) $z = -1 + i$ (e) $z = -2$ (f) $z = -1 - i$

   (g) $z = -4i$ (h) $z = -\sqrt{3} + i$ (i) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

   (j) $z = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4$ (k) $z = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{2014}$

5. Végezze el a következő hatványozásokat!

   (a) $(1+i\sqrt{3})^{-10}$ (b) $(1-i)^4$ (c) $(-1+i)^7$

   (d) $(1+i)^{12}$ (e) $(-2\sqrt{3}+2i)^{-9}$ (f) $(2+2i)^6$

6. Végezze el a következő gyökvonásokat!

   (a) $\sqrt[4]{-16}$ (b) $\sqrt{2i}$ (c) $\sqrt[5]{-243i}$

   (d) $\sqrt[3]{-4\sqrt{2}+i4\sqrt{2}}$ (e) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}$ (f) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$

7. Oldja meg a következő egyenleteket!

   (a) $z^3-1=0$ (b) $z^2-z-10=0$ (c) $z^5-i=0$

   (d) $z^3=1+i$ (e) $z^3+4\sqrt{2}-i4\sqrt{2}=0$ (f) $5z^2=128i$

   (g) $z^4-2z^2+4=0$ (h) $z^6+2z^3+2=0$ (i) $(6-z)^6+1=0$

8. Végezze el a következő műveleteket!

   (a) $(-\sqrt{3}+i)^{\frac{3}{2}}$ (b) $(-1-i)^{\frac{8}{3}}$