7. Görbék a térben

Írjuk fel az alábbi térgörbék adott pontbeli érintőegyenesének az egyenletét.

Általánosan

$\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ görbe t_0-beli érintőegyenesének az irányvektora $\dot{\underline{r}}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$. Egy pontja $\underline{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. Így az egyenes egyenlete:

$$\underline{e}(t) = (x(t_0) + x'(t_0)t, y(t_0) + y'(t_0)t, z(t_0) + z'(t_0)t),$$

ahol $-\infty < t < \infty$.

1. $\underline{r} = (t-3)\underline{i} + (t^2+1)\underline{j} + t^2\underline{k}$, $t = 2$
2. $\underline{r} = \underline{i}\sin t + \underline{j}\cos t + \underline{k}\dfrac{1}{\cos t}$, $t = 0$
3. $\underline{r} = \underline{i}2t + \underline{j}\dfrac{2}{t} + \underline{k}t^2$, $t = 2$
4. $\underline{r} = \underline{i}\dfrac{t}{1+t} + \underline{j}\dfrac{1+t}{t} + \underline{k}t^2$, $t = 1$

Számítsuk ki az alábbi térgörbék ívhosszát a megadott intervallumon.

Általánosan

$\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ görbe $a \le t \le b$ intervallumon vett képének ívhossza

$$L = \int_a^b |\dot{\underline{r}}(t)|\,\mathrm{d}t,$$

ahol természetesen

$$|\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

5. $\underline{r} = (3\cos t, 3\sin t, 2t)$, $0 \le t \le 4\pi$
6. $\underline{r} = (t\cos t, t\sin t, 3t)$, $0 \le t \le 2\pi$
7. $\underline{r} = at\underline{i} + \sqrt{3ab}t^2\underline{j} + 2bt^3\underline{k}$, $0 \le t \le 1$
8. $\underline{r} = e^{2t}\cos t\underline{i} + e^{2t}\sin t\underline{j} + 5e^{2t}\underline{k}$, $-20 \le t \le 1$
9. $\underline{r} = t^2\underline{i} + 2t^6\underline{j} + \sqrt{3}t^4\underline{k}$, $0 \le t \le 10$
10. $\underline{r} = \dfrac{\cos t}{\mathrm{ch}t}\underline{i} + \dfrac{\sin t}{\mathrm{ch}t}\underline{j} + 3t^2\underline{k}$, $0 \le t \le 10$
11. $\underline{r} = 3t^2\underline{i} + (\sqrt{2}t + 3)\underline{j} + 3t^2\underline{k}$, $0 \le t \le 1$
12. $\underline{r} = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1-t)\underline{k}$, $t = 2$

Számítsuk ki az alábbi görbék adott pontjában a simulósík egyenletét, a simulókör sugarát, görbületét, torzióját.

A simulósík t_0-ban. A sík normálvektorát kettő, a síkba mutató vektor határozza meg. Ez a két vektor a t_0-beli sebesség vektor $\dot{\underline{r}}(t_0)$ és gyorsulás vektor $\ddot{\underline{r}}(t_0)$. A normális mindkét vektorra merőleges. Ilyen vektort például a két vektor vektoriális szorzatával tudunk előállítani:

$$(n_1, n_2, n_3) = \dot{\underline{r}}(t_0) \times \ddot{\underline{r}}(t_0).$$

A sík egy pontja természetesen $\underline{r}(t_0) = (x_(t_0), y(t_0), z(t_0))$. A sík egyenlete:

$$n_1(x - x(t_0)) + n_2(y - y(t_0)) + n_3(z - z(t_0)) = 0.$$

13. $\underline{r} = (3t+7)\underline{i} + (2t^2+8)\underline{j} + \dfrac{1}{6}t^3\underline{k}$, $t = 1$
14. $\underline{r} = (t^3 - 2t, 3t + 2, t^2 - 5)$, $t = 1$
15. $\underline{r} = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1-t)\underline{k}$, $t = 2$
16. $\underline{r} = 3t^2\underline{i} + (2t+3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}$, $t = -1$
17. $\underline{r} = \dfrac{t^4}{4}\underline{i} + \dfrac{t^3}{3}\underline{j} + \dfrac{t^2}{2}\underline{k}$, $t = 1$
18. $\underline{r} = (\cos^2 t, \cos t \sin t, \sin^2 t)$, $t = \dfrac{\pi}{6}$

Vegyes feladatok a korábbi évekből

19. Határozzuk meg, hogy mekkora szöget zár be az $\underline{r} = (2t^3, 3t^2, -6t)$ térgörbe $t = 2$-beli simulósíkja az x—z síkkal.
20. Határozzuk meg az $\underline{r}(t) = (\cos t)\underline{i} + (t\sin t)\underline{j} + (t + \sin(6t))\underline{k}$ térgörbe görbületét a $\dfrac{3\pi}{2}$ pontban.
21. Határozzuk meg az $\underline{r}(t) = t\,\underline{i} + e^{(t+1)^2}\underline{j} + e^{2t+2}\underline{k}$ térgörbe görbületét a $t_0 = -1$ pontban.
22. Határozzuk meg az $\underline{r}(t) = t\,\underline{i} + e^{(t+1)^2}\underline{j} + e^{2t+2}\underline{k}$ térgörbe görbületét a $t_0 = -1$ pontban.
23. Tekintsük az $\underline{r} = (t, t, \sqrt{2}\mathrm{ch}t)$ görbét a $[0, \infty)$ intervallumon. Mely pontokban lesz a simulókörének a sugara $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$?
24. Határozzuk meg azokat a pontokat, ahol az $\underline{r}(t) = (t^2, t\cos t, t\sin t)$, $t \ge 0$ görbe érintője merőleges az x–y síkra.
25. Határozzuk meg azokat a pontokat, ahol az $\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t)$, $0 \le t \le \pi$ görbe érintője merőleges lesz az $x + y + z = 1$ síkra.
26. Tekintsük az $\underline{r} = (t, t, \mathrm{sh}t)$ görbét a $(-\infty, \infty)$ intervallumon. Mely pontokban lesz a görbe érintője merőleges az $x + y + z = 1$ síkra?
27. Határozzuk meg, hogy mekkora szöget zár be az $\underline{r} = (2t^3, 3t^2, -6t)$ térgörbe $t_0 = 2$-beli érintője az x—z síkkal.