2. Sajátérték probléma

1. Szimmetrikus mátrixok

Ha A szimmetrikus mátrix (vagy ami vele ekvivalens, szimmetrikus lineáris transzformáció), akkor

(a) minden sajátértéke valós.

(b) különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek.

(c) következésképpen, ha A $n \times n$-es mátrix, akkor van n db merőleges sajátvektora: $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots, \underline{s}_n$.

Vegyük az n dimenziós tér bázisának ezt az $\mathcal{S} = (\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots, \underline{s}_n)$ vektorrendszert. Ebben a bázisban felírva egy tetszőleges $\underline{x}$ vektort azt jelenti, hogy

$$\underline{x} = x_1\underline{s}_1 + x_2\underline{s}_2 + \cdots + x_n\underline{s}_n, \text{ azaz } \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ha az A transzformációt végrehajtjuk, akkor hogyan változnak x koordinátái, ha ebben a bázisban írjuk fel?

$$A\underline{x} = A(x_1\underline{s}_1 + x_2\underline{s}_2 + \cdots + x_n\underline{s}_n) \underset{\text{mert } A \text{ lineáris trafó}}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$= x_1A\underline{s}_1 + x_2A\underline{s}_2 + \cdots + x_nA\underline{s}_n \underset{\substack{\text{mert } \underline{s}_i\text{-k sajátvektorok} \\ \lambda_i \text{ sajátértékekkel}}}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$= x_1\lambda_1\underline{s}_1 + x_2\lambda_2\underline{s}_2 + \cdots + x_n\lambda_n\underline{s}_n.$$

Tehát $A\underline{x}$-et felírva az $\mathcal{S} = (\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots, \underline{s}_n)$ bázisban azt kapjuk, hogy:

$$A\underline{x} = (x_1\lambda_1)\underline{s}_1 + (x_2\lambda_2)\underline{s}_2 + \cdots + (x_n\lambda_n)\underline{s}_n$$

azaz

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{bmatrix}.$$

Ami nagyon hasznos, ugyanis ebben a bázisban egyszerű szerkezetű az A transzfomáció, a bázis irányokban (= sajátvektor irányokban) a bázis vektorok által meghatározott egyenesen marad.

2. Feladatok

1. A $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora

   A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. Az $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix egy sajátvektora

   A) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Az $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ mátrix egy sajátvektora

   A) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Az $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix egy sajátvektora

   A) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2×2-es mátrixok

1. A $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei?

   4 kétszeres sajátérték

2. $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei, sajátvektorai?

   $0, 13$, $(-2, 3), (3, 2)$, mit jelent a 0 sajátérték?

3. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei , sajátvektorai?

   $3, 7$, $(-4, 5), (0, 1)$

4. $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei , sajátvektorai?

   $0, 10$ sajátvektorai ...

5. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei , sajátvektorai?

   $3, 1$, $(1, 1), (1, -1)$

6. $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei , sajátvektorai?

   $5, 10$, $(1, 2), (2, -1)$

7. $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei , sajátvektorai?

   $7, 6$, $(1, 1), (-4, 5)$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei , sajátvektorai?

   $6, -1$, $(3, 4), (1, -1)$

9. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei , sajátvektorai?

   $7, -2$, $(1, 0), (-5, 1)$

10. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei , sajátvektorai?
$i, -i$, $(1, i), (1, -i)$

Ez a 90°-os forgatás mátrixa a standard bázisban.

<u>3 × 3-as mátrixok</u>

1. $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei, sajátvektorai
$1, -1, 12$
$(0, 1, 0), (-2, 0, 3), (3, 0, 2)$

2. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei, sajátvektorai
$5, 1, 32$
$(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)$

3. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei, sajátvektorai
$4, 9, -1$

4. $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei, sajátvektorai
$-1, -2, 11$

5. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
2 háromszoros sajátérték, minden vektor sajátvektora

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$
$6, -3, -3$
$u_1 = (2, 1, -2)$, $2x + y - 2z = 0$ egyenletből például: $u_2 = (-1, 2, 1), u_3 = u_1 \times u_2 = (4, 2, 5)$

7. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei, sajátvektorai
$6, 6, 1$

8. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei, sajátvektorai
$-2, 8, 8$

9. $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei, sajátvektorai
$-1, 2, 7$

10. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei, sajátvektorai
$-2, 5, 1$

11. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix sajátvektorai, sajátvektorai
$-\lambda^3 + 2 + 3\lambda$, tippelni kell az egyik gyökre, -1, majd még kijön $-1, -2$

12. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei, sajátvektorai
karakterisztikus egyenlettel trükközni kell: $0, 6, 3$
$(-1, 2, 2), (2, -1, 2), (2, 2, -1)$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei, sajátvektorai
karakterisztikus egyenlettel trükközni kell: $3, 2, 6$
$(-1, 1, -1), (1, -1, 0), (1, 1, 2)$

14. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei, sajátvektorai
karakterisztikus egyenlettel trükközni kell: $4, 3, 6$
$(1, 1, 0), (1, -1, 1), (1, -1, -2)$

Nem szimmetrikus mátrixok

Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait.

1. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$
$1, 2, 11$
$(1, -1, 0), (-2, 3, 4), (-1, -3, 2)$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
$3, 2, 1$
$(2, 2, 1), (1, 1, 0), (0, -2, 1)$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
$5, 1, 1$
$(1, 1, 1)$; $x + 2y + z = 0$-ból $(2, -1, 0), (1, 0, -1)$

4. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{bmatrix}$ *Egzotikus eset!*
$2, 1, 1$
$(0, 0, 1)$; 1-hez egyetlen sajátvektort kapunk!!! $(-1, 2, 20)$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ *Egzotikus eset!*
$1, 1, 1$
egyetlen sajátvektort kapunk!!! $(1, 1, 1)$

Határozzuk meg az álábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!
A megoldások Rudas Anna jegyzetében találhatók.

18. $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 13 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 13 \end{bmatrix}$

19. $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 13 & -5 & 2 \\ -5 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

20. $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 14 & -4 & -2 \\ -4 & 14 & -2 \\ -2 & -2 & 17 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} \frac{41}{25} & -\frac{12}{25} & 0 \\ -\frac{12}{25} & \frac{34}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} \frac{41}{25} & -\frac{12}{25} & 0 \\ -\frac{12}{25} & \frac{34}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$