Másodrendű, állandó együtthatós, lineáris differenciálegyenlet.

Általános alakja:

$$y'' + a \cdot y' + by = q(x)$$

Ha $q(x) = 0$, akkor **homogén** lineárisnak nevezzük.

Ha $q(x) \neq 0$, akkor **inhomogén** lineárisnak nevezzük.

A jobb oldalon lévő $q(x)$ függvényt szokás külső tagnak nevezni.

Mivel ez egy speciális lineáris egyenlet, minden igaz rá amit a lineáris egyenletekről mondtunk.

Tehát:

Az állandó együtthatós inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{in\hom,ált} = y_{\hom,ált} + y_{in\hom,part}$$

A homogén rész:

$$y'' + a \cdot y' + by = 0$$

karakterisztikus egyenlete: $\lambda^2 + a\lambda + b$

A homogén egyenlet általános megoldásának alapesetei:

1. A $\lambda^2 + a\lambda + b$ egyenletnek $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valós gyöke van. Ebben az esetben már van is a homogén egyenletnek két független megoldása $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ és $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

ekkor a homogén egyenlet általános megoldása

$$y_{\hom,ált} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. A $\lambda^2 + a\lambda + b$ egyenletnek $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ valós megoldása van.

Ekkor csak egy megoldás van, $e^{\lambda x}$.

Beláthatjuk, hogy $y_2 = x \cdot e^{\lambda x}$ is megoldása a homogén egyenletnek és lineárisan független. $e^{\lambda x}$-hez (nem konstans szorosa)

Ekkor a homogén egyenlet általános megoldása.

$$y_{\hom,ált} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

1. A karakterisztikus egyenletnek nincs valós gyöke. Ebben az esetben konjugált komplex gyökei vannak.

Legyenek a gyökök $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

Ekkor $e^{\lambda_1 x}$ és $e^{\lambda_2 x}$ független megoldások, de nem valósak $e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x}$

$$y_{\text{hom},\acute{a}lt} = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 \cos \beta x$$

A másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása is a homogén egyenlet általános megoldása és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege:

$$y_{in\,\text{hom},\acute{a}lt} = y_{\text{hom},\acute{a}lt} + y_{in\,\text{hom},part}$$

Példa

$$y'' + y' - 2y = x^2$$

Az inhomogén differenciálegyenlethez tartozó homogén egyenlet:

$$y'' + a \cdot y' + by = 0$$

Példa

$$y'' + y' - 2 = 0$$

Másodrendű állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet partikuláris megoldásának megtalálása speciális külső tag esetén, próba függvénnyel.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását un. speciális külső tagok esetében (polinom, e^{ax}, $\cos(bx)$, $\sin(bx)$ és ezek szorzatának összege) tudjuk könnyen meghatározni.
Az $y'' + a \cdot y' + by = q(x)$ egyenletben $q(x)$ függvényt szokás külső tagnak nevezni.

Jelölések: az alábbi táblázatban $p_n(x)$ jelöl egy konkrét n-ed fokú polinomot, $P_n(x)$ és $Q_n(x)$ pedig egy ugyancsak n-ed fokú, de ismeretlen együtthatós polinomot jelöl. λ_1 és λ_2 jelöli a karakterisztikus egyenlet gyökeit.

A speciális külső tagok lehetséges esetei

1. Ha a $q(x)$ külső tag $p_n(x) \cdot e^{ax}$ alakú (a valós) és az e^{ax} kitevőjében szereplő a nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $P_n(x)e^{ax}$ alakban keressük, ahol $P_n(x)$ ismeretlen együtthatós általános n-ed fokú polinom.
2. Ha az e^{ax} kitevőjében szereplő a egyszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, azaz e^{ax} megoldása a homogén differenciálegyenletnek (egyszeres rezonancia), akkor az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $x\ P_n(x)e^{ax}$ alakban, ha

kétszeres gyöke (kétszeres rezonancia) akkor $x^2\ P_n(x)e^{ax}$ keressük, ahol $P_n(x)$ ismeretlen együtthatós általános n-ed fokú polinom. Ezt nevezzük **rezonanciának**.

3. Ha a $q(x)$ külső tag $p_n(x)\cdot e^{ax}\sin bx$ vagy $p_n(x)\cdot e^{ax}\cos bx$ alakú (a, b valós) és az $e^{(a+bi)x}$ kitevőjében szereplő $a+bi$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $P_n(x)e^{ax}\sin bx$ $+Q_n(x)e^{ax}\cos bx$ alakban keressük, ahol $P_n(x)$ és $Q_n(x)$ ismeretlen együtthatós általános n-ed fokú polinomok.
4. Ha az $e^{(a+bi)x}$ kitevőjében szereplő $a+bi$ gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $x\cdot P_n(x)e^{ax}\sin bx$ $+x\cdot Q_n(x)e^{ax}\cos bx$ alakban keressük, ahol $P_n(x)$ és $Q_n(x)$ ismeretlen együtthatós általános n-ed fokú polinomok.

Kidolgozott feladatok

1. $y''+y'-2y=x^2$,
a homogén egyenlet $y''+y'-2y=0$,
a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2+\lambda-2=0$, megoldásai $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{\text{hom},\acute{a}lt}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$,
az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p=Ax^2+Bx+C$ alakban keressük. (táblázat 1. sor)
$y_p{}'=2Ax+B$, $y_p{}''=2A$, az inhomogén egyenletbe helyettesítve,
$2A+2Ax+B-2\left(Ax^2+Bx+C\right)\equiv x^2$, rendezve
$-2Ax^2+x\left(2A-2B\right)+2A-2C+B\equiv x^2$
és az együtthatókat összehasonlítva kapjuk, hogy $-2A=1$, $2A-2B=0$, $2A-2C+B$ =0, innen $A=-\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{1}{2}$, $C=-\dfrac{3}{2}$
Tehát $y_p=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:
$$y_{in\text{hom},\acute{a}lt}=C_1e^x+C_2e^{-2x}+-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

2. $y''+y'=x^2$
a homogén egyenlet $y''+y'=0$,
a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2+\lambda=0$, megoldásai $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{\text{hom},\acute{a}lt}=C_1e^0+C_2e^{-x}=C_1+C_2e^{-x}$,
az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p=x\left(Ax^2+Bx+C\right)$, azaz $y_p=Ax^3+Bx^2+Cx$ alakban keressük. (táblázat 2. sor)
$y_p{}'=3Ax^2+2Bx+C$, $y_p{}''=6Ax+2B$, az inhomogén egyenletbe helyettesítve
$6Ax+2B+3Ax^2+2Bx+C\equiv x^2$ és rendezve $3Ax^2+\left(6A+2B\right)x+2B+C\equiv x^2$

az együtthatókat összehasonlítva kapjuk, hogy $3A=1$, $6A+2B=0$, $2B+C=0$

$A=\frac{1}{3}$, $B=-1$, $C=2$

Tehát $y_p=\frac{1}{3}x^2-x+2$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$y_{inhom,ált}=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{3}x^2-x+2$

3. $y''+y'-2y=e^{2x}$,
a homogén egyenlet $y''+y'-2y=0$,
a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2+\lambda-2=0$, megoldásai $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{hom,ált}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$,
az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p=A\cdot e^{2x}$ alakban keressük.
(táblázat 3. sor)
$y_p{}'=2A\cdot e^{2x}$, $y_p{}''=4A\cdot e^{2x}$, az inhomogén egyenletbe helyettesítve,
$4A\cdot e^{2x}+2A\cdot e^{2x}-2\left(Ae^{2x}\right)\equiv e^{2x}$, kiemelve $e^{2x}\left(4A+2A-2A\right)\equiv e^{2x}$

innen következik, hogy $4A=1$, $A=\frac{1}{4}$

Tehát $y_p=\frac{1}{4}e^{2x}$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$y_{inhom,ált}=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\frac{1}{4}e^{2x}$

4. $y''+y'-2y=e^{-2x}$,
a homogén egyenlet $y''+y'-2y=0$,
a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2+\lambda-2=0$, megoldásai $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{hom,ált}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$,
az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p=x\cdot A\cdot e^{-2x}$ alakban keressük.
(táblázat 4. sor)
$y_p{}'=A\left(x\cdot(-2)\cdot e^{-2x}+\cdot e^{-2x}\right)=Ae^{-2x}\left(-2x+1\right)$,
$y_p{}''=A\left((-2)\cdot e^{-2x}\left(-2x+1\right)+\cdot e^{-2x}\cdot(-2)\right)=-2Ae^{-2x}\left(-2x+2\right)$, az inhomogén egyenletbe helyettesítve, $-2Ae^{-2x}\left(-2x+2\right)+Ae^{-2x}\left(-2x+1\right)-2\left(x\cdot A\cdot e^{-2x}\right)\equiv e^{-2x}$,
kiemelve $Ae^{-2x}\left(4x-4-2x+1-2x\right)\equiv e^{-2x}$, azaz $Ae^{2x}\left(-3\right)\equiv e^{2x}$

innen következik, hogy $-3A=1$, $A=-\frac{1}{3}$

Tehát $y_p=-\frac{1}{3}x\cdot e^{2x}$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$y_{inhom,ált}=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{1}{3}e^{-2x}$

5. $y''-2y'+y=e^x$,
a homogén egyenlet $y''-2y'+y=0$,

a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2-2\lambda+1=0$, megoldásai $\lambda_1=\lambda_2=1$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{\text{hom},ált}=C_1e^x+C_2xe^x$,

az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p=x^2\cdot A\cdot e^x$ alakban keressük. (táblázat 5. sor)

$y_p{}'=A\left(x\cdot(-2)\cdot e^{-2x}+\cdot e^{-2x}\right)=Ae^{-2x}\left(-2x+1\right)$,

$y_p{}''=A\left((-2)\cdot e^{-2x}\left(-2x+1\right)+\cdot e^{-2x}\cdot(-2)\right)=-2Ae^{-2x}\left(-2x+2\right)$, az inhomogén egyenletbe helyettesítve, $-2Ae^{-2x}\left(-2x+2\right)+Ae^{-2x}\left(-2x+1\right)-2\left(x\cdot A\cdot e^{-2x}\right)\equiv e^{-2x}$,

kiemelve $Ae^{-2x}\left(4x-4-2x+1-2x\right)\equiv e^{-2x}$, azaz $Ae^{2x}\left(-3\right)\equiv e^{2x}$

innen következik, hogy $-3A=1$, $A=-\dfrac{1}{3}$

Tehát $y_p=-\dfrac{1}{3}x\cdot e^{2x}$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$y_{in\text{hom},ált}=C_1e^x+C_2xe^x-\dfrac{1}{3}e^{-2x}$

6. $y''-2y'+y=xe^{2x}$,

a homogén egyenlet $y''-2y'+y=0$,

a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2-2\lambda+1=0$, megoldásai $\lambda_1=\lambda_2=1$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{\text{hom},ált}=C_1e^x+C_2xe^x$,

az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p=\left(Ax+B\right)\cdot e^{2x}$ alakban keressük. (táblázat 6. sor)

$y_p{}'=Ae^{2x}+\left(Ax+B\right)2e^{2x}=e^{2x}\left(2Ax+A+2B\right)$,

$y_p{}''=2e^{2x}\left(2Ax+A+2B\right)+e^{2x}\left(2A\right)=4e^{2x}\left(Ax+A+B\right)$, az inhomogén egyenletbe helyettesítve, $4e^{2x}\left(Ax+A+B\right)-2e^{2x}\left(2Ax+A+2B\right)+\left(Ax+B\right)e^{2x}\equiv xe^{2x}$,

kiemelve $e^{2x}\left(4Ax+4A+4B-4Ax-2A-4B+Ax+B\right)\equiv e^{-2x}$, azaz

$e^{2x}\left(Ax+2A+B\right)\equiv xe^{2x}$

innen következik, hogy $A=1$, $2A+B=0$, $B=-2$

Tehát $y_p=(x-2)\cdot e^{2x}$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$y_{in\text{hom},ált}=C_1e^x+C_2xe^x+(x-2)\cdot e^{2x}$

7. $y''-2y'+y=\sin 2x$

a homogén egyenlet $y''-2y'+y=0$,

a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2-2\lambda+1=0$, megoldásai $\lambda_1=\lambda_2=1$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{\text{hom},ált}=C_1e^x+C_2xe^x$,

a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2+\lambda=0$, megoldásai $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y_{\text{hom},ált}=C_1e^0+C_2e^{-x}=C_1+C_2e^{-x}$,

az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_p=A\sin 2x+B\cos 2x$, azaz (táblázat 10. sor)

$y_p{}' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$, $y_p{}'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$, az inhomogén egyenletbe helyettesítve

$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 2\left(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x\right) + A\sin 2x + B\cos 2x \equiv \sin 2x$ és

$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x + \left(8A\sin 2x + 8B\cos 2x\right) + A\sin 2x + B\cos 2x \equiv \sin 2x$ és

$5A\sin 2x + 5B\cos 2x \equiv \sin 2x$

rendezve $5A\sin 2x \equiv \sin 2x$

az együtthatókat összehasonlítva kapjuk, hogy $-4A - 2B = 1$, $2A + 4B = 0$,

$A = \frac{1}{5}$, $B = 0$,Tehát $y_p = \frac{1}{5}\sin 2x$, vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{in\hom,ált} = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{5}\sin 2x$$

Kidolgozott példák

Adja meg az általános megoldást!

$$y'' - 3y' + 2y = a^{3x} + \left(x^2 + x\right)$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = \left(\lambda - 2\right)\left(\lambda - 1\right) \qquad y_{\hom,ált} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} =$$

$$y_p := Ae^{3x} + \left(Bx^2 + Cx + D\right) \Big| \cdot 2$$

$$y_p{}' = 3Ae^{3x} + 2Bx + C \Big| \cdot (-3)$$

$$y_p{}'' = 9Ae^{3x} + 2B \Big| \cdot 1$$

$$\left(9A - 9A + 2A\right)e^{3x} + x^2\left(2B\right) + x\left(2C - 6B\right) + \left(2D - 3C + 2B\right) \equiv a^{3x} + \left(x^2 + x\right)$$

$A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 2$, $D = \frac{5}{2}$

Tehát

$$y_{in\hom,ált} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{5}{2}$$

Adja meg az általános megoldást!

$$y'' + 8y' + 25y = a^{-4x}$$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_{hom,ált} = C_1 e^{-4x}\cos 3x + C_2 e^{-4x}\sin 3x$$

$y_p = Ae^{-4x}$ (nincs rezonancia, akkor lenne, ha a külső tag $e^{-4x}\cos 3x$ vagy $e^{-4x}\sin 3x$ lenne)

$y_p{}' = -4Ae^{-4x}$, $y_p{}'' = 16Ae^{-4x}$ visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$\left(25A - 32A + 16A\right)e^{-4x} \equiv e^{-4x}$, azaz $A = \dfrac{1}{9}$

Tehát

$$y_{inhom,ált} = C_1 e^{-4x}\cos 3x + C_2 e^{-4x}\sin 3x + \frac{1}{9}e^{-4x}$$