6. fejezet

Komplex számok

A komplex szám algebrai alakja

D 6.1 **Komplex szám***nak nevezünk minden olyan* $a+bi$ *alakú kifejezést, amelyben* a *és* b *valós szám,* i *pedig az összes valós számtól különböző —* **képzetes egység***nek nevezett — szimbólum. Az* a *illetve* b *valós számot a* $z = a + bi$ *komplex szám* **valós részé***nek illetve* **képzetes részé***nek hívjuk. Jelölésük:* $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. *Az* $a + bi$ *alakú kifejezés a komplex szám* **algebrai alak***ja.*

D 6.2 *Algebrai alakban adott komplex számok* **összeadás***át és* **szorzás***át a többtagú algebrai kifejezések összeadási, ill. szorzási szabálya szerint végezzük, hozzátéve, hogy* $i^2 := -1$.

D 6.3 *Az* $z = a+bi$ *komplex szám* **konjugált***ján az* $a-bi$ *komplex számot értjük. Jele:* $\overline{z}$.

T 6.4 *Tetszoleges* z_1, z_2 *komplex számokra* $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

D 6.5 *A* $z = a + bi$ *komplex szám* **abszolút érték***én a* $|z| = |a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2}$ *nemnegatív valós számot értjük.*

T 6.6 *Bármely* z, z_1 *és* z_2 *komplex számra érvényesek a következő egyenlőségek:* $z\overline{z} = |z|^2$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, *és a háromszögegyenlőtlenség:* $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Feladatok

1.$^\triangleright$ Ábrázoljuk a Gauss-féle számsíkon az alábbi komplex számokat és helyvektorukat:
$z_1 = 3 - i, \quad z_2 = 1 + 4i,$
$z_3 = -2 + 3i, \quad z_4 = -2 - 3i.$

2.$^\triangleright$ Írjuk fel a mellékelt ábrán helyvektoraikkal feltüntetett komplex számokat algebrai alakban:

3. Írjuk fel az alábbi komplex számok konjugáltját: $z_1 = 2 + 7i$, $z_2 = -3 - 5i$, $z_3 = 5i$, $z_4 = -i$, $z_5 = -9$, $z_6 = 0$.

Legyen $n > 2$ természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy

4. $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \cdots + \overline{z}_n$,

5. $\overline{z_1 z_2 \ldots z_n} = \overline{z}_1 \overline{z}_2 \ldots \overline{z}_n$, **6.** $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Számítsuk ki az alábbi két-két komplex szám összegét és különbségét:

7. $2 + 5i, \quad 4 - 3i$, **8.** $3 - 4i, \quad -5 + 2i$, **9.** $4 - 3i, \quad -2 - i$.

Számítsuk ki az alábbi két-két komplex szám szorzatát:

10. $3 - 5i, \quad -4 + i$, **11.** $1 - 3i, \quad -i$, **12.** $2 + 5i, \quad 4 - 3i$.

Számítsuk ki az alábbi komplex számok hányadosát:

13.▷ $3 + 2i, \quad 1 - i$, **14.** $5 - i, \quad 1 - 2i$, **15.**• $-5 - 2i, \quad -3i$.

Hozzuk algebrai alakra az alábbi kifejezéseket:

16.▷ $\dfrac{2}{(1-i)(3+i)}$, **17.** $\dfrac{1}{(3+4i)^2}$, **18.** $\dfrac{2+i}{i(-3+4i)}$,

19. $\dfrac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)}$, **20.** $\dfrac{1}{i(3-2i)(1+i)}$, **21.** $\dfrac{i}{(1-i)(1-2i)(1+2i)}$.

22. Legyen $z_1 = 1 - 5i$ és $z_2 = 3 + 4i$. Számítsuk ki a következőket:

$$\frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{\overline{z}_1}{z_2}, \quad \frac{z_1}{\overline{z}_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}, \quad \frac{z_1}{|z_2|}, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|.$$

23. Legyen $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - 2i$. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:

$$z_1 - \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{z_1 - 1}{z_2}, \quad z_1^2 - \frac{iz_1}{z_2}, \quad \frac{z_1}{iz_2}.$$

Legyen $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$ és $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Számítsuk ki a következőket:

24. $|3z_1 - 4z_2| + z_3\overline{z}_3$, **25.** $z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8$, **26.** $\left|\dfrac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i}\right|$.

Számítsuk ki az alábbi komplex számok abszolút értékét:

27. $\dfrac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(4+3i)}$, **28.** $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2} + i\sqrt{2xy}}{(x-y) + 2i\sqrt{xy}}$, $x, y \in \mathbf{R}^+$.

29.• Határozzuk meg azokat az x és y valós számokat, amelyekre fennáll az alábbi egyenlőség: $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$.

Adjuk meg a következő, xy-síkbeli görbék komplex változós egyenletét:

30.• $(-2; 1)$ középpontú 4 sugarú kör, **31.**• $y = mx + b$ egyenletű egyenes,

32. $(-3; 0)$ és $(3; 0)$ fókuszpontú ellipszis, nagytengelyének hossza 10.

Adjuk meg a Gauss-féle számsíkon az alábbi feltételeket kielégítő pontok halmazát:

33. $1 < |z| < 2$, **34.** $|z| = 2$, **35.**• $|z - i| = |z + i|$,

36. $|z + i| \le 1$, **37.**▷ $|2z - 4i| < 1$, **38.**▷ $|z| \le |z + i|$,

39. $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| = 2$.

40.* Bizonyítsuk be, hogy bármely kör vagy egyenes egyenlete a Gauss-féle számsíkon felírható $az\overline{z} + bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0$ alakban, ahol $a, c \in \mathbf{R}$ és $b \in \mathbf{C}$.

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

41. $x^2 + 2 = 0,$ **42.**$^\bullet$ $x^2 - 2x + 2 = 0,$ **43.** $x^2 - 6x + 13 = 0,$

44. $x^2 + 8x + 17 = 0,$ **45.** $x^4 - x^2 - 6 = 0,$ **46.** $x^2 + 5 + \dfrac{6}{x^2} = 0.$

47.$^\triangleright$ Oldjuk meg a $|z| + z = 2 + i$ egyenletet!

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a komplex számok halmazán:

48. $\begin{aligned} iz_1 - iz_2 &= -2 \\ 2z_1 + z_2 &= i, \end{aligned}$

49. $\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 2 \\ z_1 - z_2 &= 2i, \end{aligned}$

50. $\begin{aligned} z_1 + 2z_2 &= 1 + i \\ 3z_1 + iz_2 &= 2 - 3i, \end{aligned}$

51. $\begin{aligned} (1+i)z_1 - (1-i)z_2 &= 0 \\ (2+i)z_1 - (1-2i)z_2 &= 0, \end{aligned}$

52. $\begin{aligned} (1+2i)z_1 + z_2 &= 1 - 2i \\ -iz_1 - iz_2 &= -2 + 3i, \end{aligned}$

53. $\begin{aligned} 2z_1 - iz_2 &= -3 + 4i \\ iz_1 + 3z_2 &= -7 - 4i, \end{aligned}$

54. $\begin{aligned} iz_1 + 2z_2 &= 1 - 2i \\ 4z_1 - iz_2 &= -1 + 3i, \end{aligned}$

55. $\begin{aligned} (1+2i)z_1 - (2+i)z_2 &= -6 - 2i \\ -z_1 + (2-i)z_2 &= 4 - 4i. \end{aligned}$

56.* Tegyük fel, hogy a z komplex számra $z^2 + z + 1 = 0$ teljesül. Számítsuk ki a $z^{65} + z^{-65}$ kifejezés értékét!

Binomiális együtthatók, binomiális tétel

D 6.7 *Legyen k és n két nemnegatív egész szám, melyekre $k \le n$. Az $\binom{n}{k}$ kifejezést az $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ egyenlőséggel definiáljuk és* **binomiális együttható***nak nevezzük.*

T 6.8 *Minden nemnegatív egész n-re és $k = 0, 1, \ldots, n$-re érvényes az $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$* **szimmetriatulajdonság**, *és $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$-re az $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$* **additív tulajdonság**.

T 6.9 *(***Binomiális tétel***) Egységelemes kommutatív gyűrű tetszőleges (u, v) elempárjára és tetszőleges nemnegatív egész n számra*

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k.$$

Feladatok

Az alábbiakban a hatványok binomiális tétel szerinti kifejtésében k**-adik tag**on ($k = 0, 1, \dots, n$) azt a tagot értjük, amelynek együtthatója $\binom{n}{k}$. Továbbá, ha n páros, akkor az (előbbi értelemben vett) $n/2$-edik tagot a kifejezés **középső tag**jának mondjuk:

57.$^{\triangleright}$ Határozzuk meg az $\left(\frac{a}{x} - \sqrt{x}\right)^{16}$ hatvány kifejtésének középső tagját.

58. Írjuk fel a $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ hatvány kifejtésének negyedik tagját!

59. A $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ hatvány kifejtésének hányadik tagjában lesz az a kitevője 7?

60. A $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{18}$ hatvány kifejtésének hányadik tagjában lesz az a és a b kitevője egyenlő egymással?

61. Írjuk fel a $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{m}$ kifejtésének 12. tagját, ha a második tag binomiális együtthatója 105.

62. Az $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^{m}$ kifejtésében a harmadik és a tizenkettedik tag binomiális együtthatója azonos. Írjuk fel azt a tagot, amelyben x nem szerepel.

63. Az $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{m}$ kifejtésében az együtthatók összege 128. Írjuk fel a kifejtésnek azt a tagját, amelyben x az ötödik hatványon szerepel.

64. Határozzuk meg az n kitevőnek azt az értékét, amelyre az $(a+b)^n$ kifejtésében a második, harmadik és negyedik tag együtthatója egy számtani sorozat egymást követő elemei.

65. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy az $\left(x + x^{\lg x}\right)^5$ hatvány kifejtésében a második tag értéke 10^6 legyen.

66. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy a $\left[(\sqrt{x})^{\frac{1}{\lg x+1}} + \sqrt[12]{x}\right]^6$ kifejtésben a harmadik tag 200 legyen.

Igazoljuk az alábbi összefüggéseket, amelyekben n tetszőleges pozitív egész, k pedig olyan egész szám, amelyre $k \le n$:

67.$^{\bullet}$ $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{n} = 2^n$,

68.$^{\bullet}$ $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$,

69.$^{\triangleright}$ $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + 99\cdot 99! = 100! - 1$,

70.$^{\triangleright}$ $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\cdot 2^{n-1}$,

71.$^{\triangleright}$ $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \cdots + (n+1)\binom{n}{n} = (n+2)\cdot 2^{n-1}$,

72.$^{\triangleright}$ $\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n} = (n-2)\cdot 2^{n-1} + 1$,

73.$^{\triangleright}$ $\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} + \cdots + 1 = \binom{n+1}{k}$,

74.$^{\triangleright}$ $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$,

75. $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$,

76. $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m}{n+1}$, ha $m \in \mathbf{N}^+$

77.* $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$,

78. $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$,

79.* $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$,

80.* $\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}^2 = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ (-1)^m\binom{2m}{m}, & \text{ha } n \text{ páros,} \end{cases}$

81.* $1 - \binom{8n}{2} + \binom{8n}{4} - \binom{8n}{6} + \cdots + \binom{8n}{8n} = 16^n$.

A binomiális tétel alkalmazásával végezzük el a következő hatványozásokat:

82.$^{\bullet}$ $\left(-3 + \sqrt{3}i\right)^4$,

83. $(2+2i)^5$,

84. $(-1+i)^7$,

85. $(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i)^6$.

A komplex szám trigonometriai alakja

D 6.10 *Vegyünk fel a síkban egy O kezdőpontú p félegyenest, és a sík minden egyes O-tól különböző P pontjához rendeljük hozzá az (r, φ) számpárt, ahol $r = |\overrightarrow{OP}|$* (**pólustávolság**) *és $\varphi = (p, \overrightarrow{OP})\angle$* (**irányszög**). *Az O pontra $r = 0$, φ tetszőleges. Az így definiált koordináta rendszert* **síkbeli polárkoordináta rendszer***nek nevezzük.*

T 6.11 *Derékszögű koordináta-rendszerben adott (x, y) pont (r, φ) polárkoordinátáit az*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

egyenletek felhasználásával, a polárkoordináta-rendszerben adott (r, φ) pont (x, y) derékszögű koordinátáit az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

egyenletek felhasználásával számítjuk ki. (Az $r = r(\varphi)$ egyenletű geometriai alakzat egyenletében az irányszöget mindig radiánban mérjük.)

D 6.12 *Ha a $z = x+yi$ komplex számban x-et és y-t az előző egyenletek szerint helyettesítjük, akkor a komplex szám $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$* **trigonometriai alak***ját kapjuk.*

T 6.13 *Legyen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Ekkor*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

T 6.14 *Tetszőleges komplex számra és tetszőleges egész n-re*

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

D 6.15 *A z komplex szám* **komplex n-edik gyök***ein az $u^n = z \quad (u, z \in \mathbf{C}; n \in \mathbf{N}^+)$ egyenlet összes komplex u megoldását értjük.*

T 6.16 *Bármely, zérustól különböző komplex számnak n darab különböző komplex n-edik gyöke van, ha n pozitív egész, és a $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (r \geq 0)$ komplex szám összes különböző komplex n-edik gyökét megadja a következő képlet:*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

ahol $\sqrt[n]{r}$ a valós r szám valós n-edik gyökét jelenti. A 0 komplex szám egyetlen n-edik gyöke 0.

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi z komplex számok valós részét ($\mathrm{Re}\, z$), képzetes részét ($\mathrm{Im}\, z$), abszolút értékét (r), és radiánban mért legkisebb nemnegatív argumentumát (φ_0):

86. $z = 3$, **87.** $z = -8$, **88.** $z = -2i$,

89. $z = 1 + i$, **90.** $z = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, **91.**$^{\bullet}$ $z = 2 - 2\sqrt{3}i$,

92. $z = 4\sqrt{3} - 4i$.

Állapítsuk meg, hogy a Gauss-féle számsík mely pontjai tesznek eleget az alábbi egyenleteknek, ill. egyenlőtlenségeknek ($\arg z$ a z egyik argumentumát jelenti):

93.$^{\triangleright}$ $\mathrm{Im}(z + i) > 2$, **94.** $\mathrm{Im}(iz) \geq 1$, **95.** $\mathrm{Re}\, z = 1$,

96. $\mathrm{Re}(2z) < 4$, **97.** $\dfrac{\pi}{4} < \arg z \leq \dfrac{\pi}{2}$, **98.**$^{\triangleright}$ $0 < \arg[(1+i)z] < \pi$.

Írjuk át az alábbi komplex számokat trigonometriai alakba:

99. $3i$, **100.** $\sqrt{3} - 3i$, **101.**$^{\bullet}$ -4,

102. $5 + 5i$, **103.** $-6 + 6\sqrt{3}i$, **104.** $-3 - 3i$,

105.$^{\bullet}$ $-i$, **106.**$^{\bullet}$ $2\sqrt{3} - 2i$.

Írjuk át algebrai alakba az alábbi komplex számokat:

107.$^{\bullet}$ $5\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, **108.** $3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$,

109. $2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, **110.** $3\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$,

111. $2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$, **112.** $2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

Írjuk át az alábbi, polárkoordinátásan megadott görbék egyenletét derékszögű koordinátás alakba. Állapítsuk meg a görbe típusát és meghatározó adatait. A feladatokban a és b pozitív konstansok.

113.$^{\bullet}$ $r = a$, **114.**$^{\bullet}$ $r = 2a\sin\varphi, \quad 0 \leq \varphi < \pi$,

115.$^{\bullet}$ $r = 2a\cos\varphi, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, **116.**$^{\triangleright}$ $r = \dfrac{2}{\cos\varphi}, \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$,

117. $r = \dfrac{a}{\sin\varphi}, \quad 0 < \varphi < \pi$, **118.**$^{\triangleright}$ $r = \dfrac{1}{1 + \cos\varphi}$,

119. $r^2 = \dfrac{a^2 b^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$, **120.** $r = \dfrac{1}{1 - \cos\varphi}$,

121. $r = \dfrac{a}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$, **122.** $r = \dfrac{1}{1 - \sin\varphi}$, **123.** $r = \dfrac{16}{5 - 3\cos\varphi}$,

124. $r = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos\varphi}$, **125.**$^{\triangleright}$ $r = \dfrac{16}{3 - 5\cos\varphi}$, **126.**$^{\triangleright}$ $r = \sqrt{a^2\cos 2\varphi}$.

Számítsuk ki az alábbi két-két komplex szám szorzatát:

127.• $3(\cos 75° + i \sin 75°)$, $2(\cos 305° + i \sin 305°)$,

128. $2\sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°)$, $3(\cos 175° + i \sin 175°)$,

129.• $2(\cos 30° + i \sin 30°)$, i,

130. $2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$, $3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$.

Írjuk fel a következő számok trigonometriai alakját:

131.• $\cos\varphi - i\sin\varphi$, **132.**▷ $-\cos\varphi + i\sin\varphi$, **133.** $-\cos\varphi - i\sin\varphi$.

Az alábbi sokszögeknek komplex számokkal megadjuk néhány csúcsát. Határozzuk meg a sokszögek hiányzó csúcsait:

134.• $z_1 = 1 + 4i$, $z_2 = 5 + i$ csúcspontú szabályos háromszög,

135.▷ $z_1 = -4 + i$ és $z_2 = 3 - 3i$ csúcspontú négyzet,

136. $z_1 = 0$, $z_2 = 1 - 2i$ és $z_3 = 2 + 3i$ csúcspontú paralelogramma,

137. 0 középpontú és $z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ csúcspontú szabályos hatszög,

138. i középpontú és $z_1 = 3 - 4i$ csúcspontú szabályos ötszög.

Számítsuk ki az alábbi z_1, z_2 komplex számok $\frac{z_1}{z_2}$ hányadosát:

139.• $z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 225° + i \sin 225°)$, $z_2 = 3(\cos 122° + i \sin 122°)$,

140. $z_1 = 3(\cos 75° + i \sin 75°)$, $z_2 = 4(\cos 13° + i \sin 13°)$,

141.• $z_1 = 3(\cos 45° + i \sin 45°)$, $z_2 = 3 - i\sqrt{3}$,

142. $z_1 = \cos 0° + i \sin 0°$, $z_2 = -4 + i\sqrt{3}$.

Írjuk fel algebrai alakban az alábbi hatványokat:

143.• $(1+i)^{12}$, **144.** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{-6}$, **145.** $\left(\sqrt{3}+i\right)^{7}$,

146. $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-10}$, **147.** $(1-i)^{-3}$, **148.**• $\left(-2\sqrt{3} + 2i\right)^{-9}$.

Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket trigonometriai alakkal és binomiális tétellel számolva:

149.• $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^4$, **150.** $(1+i)^4\left(1 - \sqrt{3}i\right)^6$, **151.** $\left(\sqrt{3}+i\right)^5$,

Határozzuk meg az alábbi z komplex számok összes komplex n-edik gyökét:

152. $z = 1$, $n = 3$, **153.** $z = -1$, $n = 3$, **154.** $z = 1$, $n = 4$,

155.• $z = 1$, $n = 6$, **156.** $z = -8i$, $n = 3$, **157.** $z = i$, $n = 2$,

158. $z = -243i$, $n = 5$, **159.** $z = -1$, $n = 7$, **160.**• $z = -2+2i$, $n = 3$,

161.• $z = 3 + 4i$, $n = 2$, **162.** $z = -7+24i$, $n = 2$.

163.▷ Mutassuk meg, hogy ha c, z tetszőleges komplex számok, akkor $\sqrt[n]{c^n z} = c\sqrt[n]{z}$, ahol a gyökvonás a komplex gyökvonást jelenti. Speciálisan $\sqrt{c^2 z} = c\sqrt{z}$.

164.$^{\triangleright}$ Bizonyítsuk be, hogy az $az^2 + bz + c = 0$ egyenlet gyökeit megkaphatjuk a

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

formulával, ha a gyökvonás a komplex négyzetgyökvonást jelenti.

Határozzuk meg az alábbi egyenlet gyökeit a komplex számok halmazában. Ha a diszkrimináns nem valós, akkor használjuk az előző feladat eredményét:

165.$^{\bullet}$ $z^2 - 2iz - 5 = 0$, **166.** $z^2 - (2+3i)z - 1 + 3i = 0$,
167. $z^2 + (5-2i)z + 5(1-i) = 0$, **168.** $z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$.

Vegyes feladatok

Bizonyítsuk be a $(\cos x + i \sin x)^5$ kifejezés kétféle kiszámításával következő azonosságokat:

169.$^{\triangleright}$ $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$,

170. $\dfrac{\sin 5x}{\sin x} = 16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$.

171.$^{\triangleright}$ Számítsuk ki $-15 - 8i$ négyzetgyökeinek pontos értékét!

172.* Szerkesszük meg a Gauss-féle számsíkon a z_1, z_2 és az 1 komplex számokhoz tartozó helyvektorok segítségével a z_1z_2 komplex számhoz tartozó helyvektort!

173.* Oldjuk meg a $\overline{z} = z^n \quad (n \in \mathbf{N}^+)$ egyenletet!

174.* Számítsuk ki az $e_0^j + e_1^j + \cdots + e_n^j \quad (j \in \mathbf{Z})$ összeget, ahol $e_0, e_1, \ldots e_n$ az $(n+1)$-edik egységgyökök.

175.* Számítsuk ki az $1 + 2e + 3e^2 + \cdots + (n+1)e^n$ összeget, ahol e tetszőleges $(n+1)$-edik egységgyök.

176.* Bizonyítsuk be, hogy ha a z komplex számra $|z| < \frac{1}{2}$ teljesül, akkor $|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$.

Mutassuk meg, hogy minden n egész számra érvényesek az alábbi egyenlőségek:

177. $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$, **178.** $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} + \sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$.

Határozzuk meg az alábbi összegeket:

179.* $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots$, **180.*** $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots$.

Mutassuk meg, hogy:

181.* $\cos\dfrac{\pi}{11} + \cos\dfrac{3\pi}{11} + \cos\dfrac{5\pi}{11} + \cos\dfrac{7\pi}{11} + \cos\dfrac{9\pi}{11} = \dfrac{1}{2}$,

182.* $\cos\dfrac{2\pi}{11} + \cos\dfrac{4\pi}{11} + \cos\dfrac{6\pi}{11} + \cos\dfrac{8\pi}{11} + \cos\dfrac{10\pi}{11} = -\dfrac{1}{2}$,

183.* $\cos\dfrac{\pi}{13} + \cos\dfrac{3\pi}{13} + \cos\dfrac{5\pi}{13} + \cos\dfrac{7\pi}{13} + \cos\dfrac{9\pi}{13} + \cos\dfrac{11\pi}{13} = \dfrac{1}{2}$.