Matematika 2 építészmérnököknek

7. gyakorlat (2004. április 14. illetve 15.)

Többváltozós függvények III.

(gyak. vez.: Rudas Anna)

Kétváltozós függvények szélsőértéke:

Az $f(x,y)$ kétváltozós függvénynek lokális szélsőértéke van a $P(x_0, y_0)$ pontban, ha az alábbi három feltétel teljesül:

$$I. \quad f'_x(x_0, y_0) = 0,$$

$$II. \quad f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

$$III. \quad f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0.$$

Ha ezek mindegyike teljesül, akkor az $f''_{xx}(x_0, y_0)$ szám előjeléből lehet megállapítani, hogy minimum- vagy maximumhelyről van-e szó:

$$f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \text{ esetén MINIMUM,}$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ esetén MAXIMUM van.}$$

1. Határozza meg az $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 2y + 5$ függvény szélsőértékét/szélsőértékeit!

   Megoldás: Először megkeressük azt a $P(x_0, y_0)$ pontot, ahol a fenti első két feltétel teljesül, ennek érdekében parciálisan deriváljuk f-et mindkét változója szerint, és megnézzük, mikor lesznek ezek nullával egyenlők:

   $$f'_x(x,y) = 4x - 2y + 4 = 0$$

   $$f'_y(x,y) = 2y - 2x - 2 = 0.$$

   Ezt a két egyenletet a P(-1,0) pont koordinátái elégítik ki, tehát HA VAN szélsőérték, az csak ebben a pontban lehet. Vizsgáljuk most a fenti harmadik feltételt:

   $$f''_{xx}(-1,0) = 4,$$
   $$f''_{xy}(-1,0) = -2,$$
   $$f''_{yy}(-1,0) = 2,$$

   ezekből $f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 4 > 0$, tehát valóban szélsőértéke van a függvénynek ebben a pontban. Mivel pedig $f''_{xx} = 4 > 0$, ezért azt állapíthatjuk meg, hogy minimumról van szó.

2. Határozza meg az $f(x,y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$ függvény szélsőértékét/szélsőértékeit!

   Megoldás: Ismét az els? két feltétel vizsgálatával kezdjük:

   $$f'_x(x,y) = (2x-6)(y^2-4y) = (2x-6)y(y-4) = 0$$

   $$f'_y(x,y) = (x^2-6x)(2y-4) = x(x-6)(2y-4) = 0.$$

   Azokban a pontokban lehet tehát széls?érték, ahol (x=3 VAGY y=0 VAGY y=4) ÉS (x=0 VAGY x=6 VAGY y=2). Összefoglalva a következ? pontok jönnek számításba: (3,2),(0,0),(6,0),(0,4) és (6,4). A harmadik feltétel fogja megmondani, hogy ezek közül melyek azok, amelyekben valóban szélsőérték van.

$$f''_{xx}(x,y) = 2(y^2 - 4y),$$

$$f''_{xy}(x,y) = (2x-6)(2y-4),$$

$$f''_{yy}(x,y) = (x^2 - 6x)2,$$

behelyettesítve az $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ formulába az öt lehetséges számpárt, kapjuk, hogy

	(3,2)	(0,0)	(6,0)	(0,4)	(6,4)
$f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2$	144	-576	-576	-576	-576

Az egyetlen olyan pont tehát, ami a harmadik feltételt is teljesíti, a (3,2) pont. Itt tehát széls?érték van, mégpedig maximum, hiszen $f''_{xx}(3,2) = -8 < 0$.

Kétváltozós függvények feltételes szélsőértéke:

Ha az f függvényt a $\phi = 0$ feltétel mellett szeretnénk maximalizálni/minimalizálni, akkor bevezetünk egy új F függvényt a következ?képpen: $F = f + \lambda\phi$, és ennek az F-nek keressük a lehetséges széls?érték helyeit az el?z?ekben látott módon. Tehát az összes változója szerint deriváljuk, és mindegyik parciális deriváltat nullával tesszük egyenl?vé. (F-nek eggyel több változója van, mint f-nek volt, hiszen belevittük a λ-t, mint új változót). Lássuk a példát:

1. Mennyi a $\sin x \sin y \sin z$ szorzat maximális értéke, ha x, y és z egy háromszög szögei?

   Megoldás: A maximalizálandó függvény $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$, a feltétel pedig az, hogy $x + y + z = \pi$, másképp írva $x + y + z - \pi = 0$. Tehát a fentiekben szereplő ϕ kifejezés most $x + y + z - \pi$. Ennek megfelel?en bevezetjük az

   $$F = \sin x \sin y \sin z + \lambda(x + y + z - \pi)$$

   négyváltozós függvényt és ennek keressük a szélsőértékét.

   $$F'_x = \cos x \sin y \sin z + \lambda = 0$$

   $$F'_y = \sin x \cos y \sin z + \lambda = 0$$

   $$F'_z = \sin x \sin y \cos z + \lambda = 0$$

   $$F'_\lambda = x + y + z - \pi = 0.$$

   Az els? három egyenletb?l látjuk, hogy $\tan x = \tan y = \tan z$, ebb?l pedig (mivel mindhárom változó 0 és π között van) következik, hogy $x = y = z$. Ezt összevetve a negyedik egyenlettel, $x = y = z = \frac{\pi}{3}$ a keresett szögek, tehát a maximális érték $(\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Kettős integrálás polárkoordinátás helyettesítéssel:

Sok esetben érdemes az x, y koordinátákról áttérni az ún. polárkoordinátákra, melyek r és φ, el?bbi jelenti az adott pont távolságát az origótól, utóbbi azt a szöget, mellyel az x irányú egységvektort kell pozitív irányba elforgatnunk, hogy a szóban forgó pont helyvektorának irányához jussunk. (Hú, ez bonyolultra sikeredett.) Ilyenkor tehát

$$x = r\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi,$$

a Jacobi-determináns pedig r, ez utóbbival nem szabad elfelejteni beszorozni az integrálandó függvényt a helyettesítéskor. Azaz

$$\int\int_T f(x,y)\mathrm{d}T = \int\int_{T'} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\mathrm{d}T',$$

ahol T' ugyanaz a tartomány, mint T, csak az új, (r,φ) koordinátarendszerben leírva. Nézzük a példákat:

1. $T = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$ tartományon $\int\int_T \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}T$. A tartomány egy körgy?r?, polárkoordinátákkal leírva $T' = \{(r,\varphi) : 1 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, erre áttérve $\int\int_T \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}T = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \ln(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = (8\ln 2 - 3)\pi$ (itt a végén parciálisan integráltunk.)

Kétváltozós függvénnyel adott felület felszínének számítása:

$$A = \int\int_T \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\mathrm{d}T$$

Síklemez tömegközéppontjának kiszámítása: Ha a T tartomány felett fekszik egy síklemez, melynek (x,y) pontbeli s?r?ségét az $f(x,y)$ kétváltozós függvény írja le, akkor a síklemez súlypontjának (x_s, y_s) koordinátáit az alábbi képletek segítségéval számolhatjuk ki:

$$x_s = \frac{\int\int_T xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int\int_T f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$y_s = \frac{\int\int_T yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int\int_T f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

Illetve homogén síklemez esetén:

$$x_s = \frac{\int\int_T x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int\int_T 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$y_s = \frac{\int\int_T y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int\int_T 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y},$$

ahol a nevez? nem más, mint a T tartomány területe.