6. Kétváltozós függvények integrálása

Téglalap alakú tartományok

1. Egy négyzet alaprajzú ($-a \le x \le a$, $-a \le y \le a$) termet a $z = \dfrac{xy}{a^2} + b$ egyenletű felülettel fedik le. Mennyi a terem térfogata.
mo.: $4ba^2$

2. $\displaystyle\iint_T (12x - 6y - 5)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$, ha
T a $0 \le x \le 2$, $-3 \le y \le 3$
mo.: 84

3. $\displaystyle\iint_{[0,3]\times[1,2]} (1 + 8xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
mo.: 57

4. $\displaystyle\iint_T (x^2 + 4y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol
$T = \{(x, y) \,:\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

5. $\displaystyle\iint_T e^{3x+4y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol
$T = \{(x, y) \,:\, 0 \le x \le \ln 2, 0 \le y \le \ln 3\}$

6. $\displaystyle\iint_T e^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol
$T = \{(x, y) \,:\, 0 \le x \le a, 0 \le y \le a\}$, $a \ge 1$

7. $\displaystyle\iint_T \sin(x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol
$T = \{(x, y) \,:\, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$
$\displaystyle\iint_T xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol
$T = \{(x, y) \,:\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

8. $\displaystyle\iint_T \frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol
$T = \{(x, y) \,:\, 0 \le x \le \sqrt{3}, 0 \le y \le 1\}$

9. $\displaystyle\iint_T \frac{2xy}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol
$T = \{(x, y) \,:\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

Integrálás normál tartományokon

10. $f(x, y) = 28x^2y$ fügvény kettős integrálja az $y = x^2$ és $y = \sqrt{x}$ függvények által határolt korlátos síktartományon
mo.:

11. (zh) T az $y = e^x$, $y = e^{-x}$ és az $y = 2$ görbék által határolt síktartomány. $\displaystyle\iint_T y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$
mo.: $4\ln 2 + \dfrac{3}{2}$

12. (zh) $\displaystyle\iint_T \cos(x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$, T egy trapéz alakú tartomány, melynek csúcsai $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(3, 2)$, $(1, 2)$.
mo.: $\dfrac{\cos 1}{2} - \dfrac{\cos 5}{2} - 2\cos 1 + 2$

13. $\displaystyle\iint_T 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol T az $y = x^2$ és $y = \sqrt{x}$ görbék által határolt zárt síkrész

14. $\displaystyle\iint_T \frac{2y}{x + 1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol T az $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$ és $x = 2$ görbék által határolt zárt síkrész

15. $\displaystyle\iint_T 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol T az $y = \mathrm{tg}x$, $x = \frac{\pi}{4}$ és $y = 1$ görbék által határolt zárt síkrész

16. $\displaystyle\iint_T y \sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol
$T = \{(x, y) \,:\, 0 \le x \le y, 0 \le y \le 1\}$ háromszög

17. $\displaystyle\iint_T \cos(x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol $T =$ a $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 0)$ csúcspontú trapéz.

18. $\displaystyle\iint_T (x^2 + 2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol T az $(1, 1)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$ csúcspontú háromszög.

Polárkoordinátás helyettesítés

19. $\displaystyle\iint_T \sqrt{100 - (x^2 + y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol T az origó középpontú, $r = 5$ sugarú kör.
mo.: $\dfrac{2\pi}{3}(1000 - \sqrt{3}375)$

20. (zh) Az $x^2 + y^2 = 9$ hengerpalást kivág egy tartományt az $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ gömbből. Térfogata=?
mo.: $2\dfrac{121\pi}{3}$

21. Hasonló feladat a $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ függvényekkel
mo.: $\dfrac{198\pi}{3}$

22. $\displaystyle\iint_T 13(x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x =$, ha T az origó körüli 4 sugarú kör.
mo.:

23. $\displaystyle\iint_T (2x + 4y + 10)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$, ha T az origó középpontú R és $2R$ sugarú körök közötti körgyűrű.
mo.: $30R^2\pi$

24. $\displaystyle\iint_T xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$, ahol T az origó középpontú R sugarú, első síknegyedbeli negyed kör
mo.:

25. $\iint\limits_T \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$, ha
$T = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$
mo.: $\dfrac{\pi}{2}(4\ln 2 - \dfrac{3}{2})$

26. $\iint\limits_T \ln(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol $1 \le x^2+y^2 \le 4\}$
mo.:

27. $\iint\limits_T \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol
$T = \{(x,y)\,:\,1 \le x^2+y^2 \le 4\}$

28. $\iint\limits_T (x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol
$T = \{(r,\varphi)\,:\,0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\}$ körcikk

29. $\iint\limits_T \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ahol
$T = \{(x,y)\,:\,(x-1)^2+y^2 \le 1\}$ kör.

30. Határozzuk meg az origó középpontú két egység sugarú gömbből az $(x-1)^2+y^2=1$ henger által kimetszett test (Viviani-féle test) térfogatát.

További fontos feladatok

Ehhez két fontos tudnivaló.

A T tartomány $f(x,y)$ által meghatározott felület felszíne:

$$A = \iint\limits_T \sqrt{1+(\partial_x f'(x,y))^2+(\partial_y f'(x,y))^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

A T tartomány felett $f(x,y)$ által meghatározott felület és az x—y sík közötti homogén tömegeloszlású testnek a súlypontja az x—y síkban (x_S, y_S):

$$x_S = \frac{\iint\limits_T x f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int\int_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$
$$y_S = \frac{\iint\limits_T y f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int\int_T f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

A 33. és a 34. feladatokban $f(x,y) \equiv 1$.

31. Határozzuk meg az $f(x,y) = xy$ nyeregfelület $x^2+y^2 \le 1$ egyenletű hengerbe eső részének felszínét.

32. Határozzuk meg az $f(x,y) = 1-x^2-y^2$ paraboloid x—y sík feletti részének a felszínét.

33. Határozzuk meg a
$T = \{(x,y)\,:\,x^2+y^2 \le R^2, y \ge 0\}$ tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának a koordinátáit.

34. Határozzuk meg a
$T = \{(x,y)\,:\,x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} \le R^2, y \ge 0, x \ge 0\}$ tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának a koordinátáit.