Gyakorló feladatok (Ép.2 matek)

1. Komplex számok:

A képzetes számok – az isteni szellem e gyönyörű és csodálatos hordozói – már majdnem a lét és nemlét megtestesítői.” (Carl Friedrich Gauss)

1) Számítsa ki a következő komplex számok esetén a z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{1}{z_2}$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_2}{z_1}$, $\frac{{z_2}^2}{\overline{z_1}}$, ${z_1}^3 \cdot z_2$ értékeket:
   - $z_1 = 2-i$, $z_2 = 2+i$,
   - $z_1 = i$, $z_2 = 2-i$,
   - $z_1 = 2-i$, $z_2 = 2$,
   - $z_1 = 3+5i$, $z_2 = 1-i$,
   - $z_1 = \sqrt{3}-i$, $z_2 = 1+i$.

2) Írjuk át algebrai alakba a következő komplex számokat:
   - $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$,
   - $z_2 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$,
   - $z_3 = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$,
   - $z_4 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$.

3) Írjuk át trigonometrikus alakba a következő komplex számokat:
   - $z_1 = 1$,
   - $z_2 = \sqrt{3}$,
   - $z_3 = -\sqrt{3}$,
   - $z_4 = i$,
   - $z_5 = -i$,
   - $z_6 = 1+i$,
   - $z_7 = 1-i$,
   - $z_8 = -1+i$,
   - $z_9 = -1-i$,
   - $z_{10} = 1+i\sqrt{3}$,
   - $z_{11} = -\sqrt{3}+i$,

- $z_{12} = 1 - i\sqrt{3}$,
- $z_{13} = 4\sqrt{3} + 4i$,
- $z_{14} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$,
- $z_{15} = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4$,
- $z_{16} = 1 + i + i^2 + ... + i^{1000}$.

4) Számítsa ki a következő komplex számok esetén a $z_1 \cdot z_2$, $\frac{1}{z_2}$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_2}{z_1}$, $\frac{z_2^{\,2}}{\overline{z_1}}$, $z_1^{\,3} \cdot z_2$, $z_2^{\,10}$, $z_2^{\,-10}$ értékeket (az eredményeket elég trigonometrikus alakban megadni, de fontos a főargumentum, azaz $\varphi \in [0, 2\pi)$).

- $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,
- $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$,
- $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_1 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$,
- $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_1 = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

5) Oldjuk meg a következő egyenleteket:

- $z^3 - 1 = 0$,
- $z^2 - z + 10 = 0$,
- $z^5 - 1 = 0$,
- $z^5 - i = 0$,
- $z^5 = i - 1$.

6) Határozzuk meg a következő komplex számok komplex köbgyökeit (elég a trigonometrikus alakot megadni, főargumentummal):

- $z_1 = 1 + i$,
- $z_1 = -\sqrt{3} + i$,
- $z_1 = -\sqrt{3} - i$.

7) Számítsuk ki a következőket: $(-\sqrt{3} + i)^{\frac{3}{2}}$, $(-1 - i)^{\frac{8}{3}}$.

2. Mátrixok sajátértékei, sajátvektorai:

1) Számítsuk ki a következő mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait:

- $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$,
- $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,
- $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

2) Számítsuk ki a következő mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait:

- $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$**,**
- $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$**,**
- $\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$**,**
- $\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$**.**

3. Differenciálegyenletek:

1) Oldjuk meg az alábbi szeparálható egyenleteket:

- $y^2 - 1 = (2y + xy)y'$,
- $2(xy + x - y - 1) = (x^2 - 2x)y'$,
- $\sqrt{1-y^2} = y'\sqrt{1+x^2}$,
- $(x + xy^2)y' = 3$,
- $y \cdot y' = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $y(1) = 1$ kezdeti feltétellel,
- $\sqrt{1-y^2} = y'(1-x^2)$,

- $e^{2y} \cdot y \cdot y' = \dfrac{x-1}{4-x^2}$.

3) Oldjuk meg az alábbi elsőrendű lineáris (inhomogén) egyenleteket (előbb oldjuk meg a hozzárendelt homogén differenciálegyenletet, majd használjuk a konstans variálásának módszerét):

- $y' = xy + x^3$,
- $y' + \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot y = \dfrac{1}{\cos x}$,
- $y' - \dfrac{2}{x} \cdot y = x^2 e^x$, $y(1) = 2$ kezdeti feltétellel,
- $y' + y \cdot thx = 6e^{2x}$.

4) Oldjuk meg az alábbi (homogén) állandó együtthatós lineáris másodrendű differenciálegyenleteket:

- $y'' - 3y' + 2y = 0$,
- $y'' - 4y' + 3y = 0$,
- $y'' - 7y' + 6y = 0$,
- $y'' - 4y' + 4y = 0$,
- $y'' - 6y' + 9y = 0$,
- $y'' - 7y' + 12y = 0$,
- $y'' - 8y' = 0$,
- $y'' - 8y' + 20y = 0$,
- $y'' + 9y = 0$.

5) Oldjuk meg az alábbi (inhomogén) állandó együtthatós lineáris másodrendű differenciálegyenleteket (próbafüggvény módszerrel):

- $y'' - 4y' + 3y = xe^{-5x}$,
- $y'' - 3y' + 2y = x + e^{-5x}$,
- $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + \cos 2x$,
- $y'' + 9y = \cos 3x$, $\begin{cases} y(\pi) = 1 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$ kezdeti érték feladat,
- $y'' - 8y' + 20y = e^{2x} \sin 4x$,
- $y'' + 4y = 4\cos 2x + 3\sin 4x$.

Az előbbi differenciálegyenletek megoldásához mindenképpen érdemes legalább a következőket átnézni:

Elemi függvények határozatlan integrálja:

f függvény	$\int f(x)dx$	Feltételek
$y=0$	c	-
$y=1$	$x+c$	$x\in R$
$y=x^r$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+c$	$x\in R$, $r\in R-\{1\}$,
$y=\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$	$x\neq 0$
$y=a^x$	$\frac{a^x}{\ln a}+c$	$x\in R$, $a\in R$, $a>0$, $a\neq 1$
speci. $y=e^x$	e^x+c	$x\in R$
$y=\sin x$	$-\cos x+c$	$x\in R$
$y=\cos x$	$\sin x+c$	$x\in R$
$y=\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgx+c$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
$y=\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx+c$	$x\neq k\pi$
$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$	$\lvert x\rvert<1$
$y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$ar\,chx+c$	$x>1$
$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$ar\,shx+c$	$x\in R$
$y=\frac{1}{1+x^2}$	$arctgx+c$	$x\in R$
$y=\frac{1}{1-x^2}$	$\begin{cases} ar\,thx+c, ha\ \lvert x\rvert<1 \\ ar\,cthx+c, ha\ \lvert x\rvert>1\end{cases}$	intervallumfüggő
$y=shx$	$chx+c$	$x\in R$
$y=chx$	$shx+c$	$x\in R$
$y=\frac{1}{ch^2x}$	$thx+c$	$x\in R$
$y=\frac{1}{sh^2x}$	$-cthx+c$	$x\neq 0$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln|\varphi(x)| + c, \qquad (\varphi(x) \neq 0)$$

$$\int (\varphi(x))^r \varphi'(x) dx = \frac{(\varphi(x))^{r+1}}{r+1} + c, \text{ ahol } r \in R - \{1\},$$

$$\int \sin[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx = -\cos\varphi(x) + c,$$

$$\int \cos[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx = \sin\varphi(x) + c,$$

$$\int \frac{1}{1+[\varphi(x)]^2} \cdot \varphi'(x) dx = arctg[\varphi(x)] + c.$$

Tétel (Helyettesítéses integrálás módszere I.): Ha $\varphi(x)$ differenciálható függvény, melynek értékkészlete az I intervallum, és ezen az intervallumon az f függvény folytonos, és $\int f(u) du = F(u) + c$, akkor $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c$.

Parciális integrálás módszere: A logaritmusokat, a trigonometrikus függvényeket és inverzeiket exponenciális függvényeket tartalmazó függvények sok esetben csak a parciális integrálás módszerével vagy ennek a módszernek többszöri egymás utáni alkalmazásával integrálhatók. Maga formula nagyon egyszerű, a szorzatfüggvény deriváltjából következik.

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, ahonnan kifejezve $f(x) \cdot g'(x)$-t kapjuk, hogy

$f(x) \cdot g'(x) = (f(x) \cdot g(x))' - f'(x) \cdot g(x)$, majd mindkét oldalt tagonként kiintegrálva

$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx}$ (*parciális integrálás képlete*).

A parciális integrálásnál nagyon fontos a „szereposztás”, azaz melyik függvény játssza az $f(x)$ és melyik a $g'(x)$ szerepét. Hibás szereposztással az integrált nem tudjuk kiszámolni, inkább bonyolultabb integrálokhoz jutunk. Ezért érdemes megjegyezni, hogy parciálisan integrálunk, amennyiben:

- az integrandus polinom- és exponenciális vagy trigonometrikus, esetleg hiperbolikus függvény szorzata (ekkor a polinomfüggvény játssza az $f(x)$ szerepét);
- az integrandus polinom- és logaritmusfüggvény szorzata, vagy polinom- és trigonometrikus függvény inverzének (arkusz függvénynek) a szorzata, esetleg polinom- és hiperbolikus függvény inverzének (area függvénynek) a szorzata (ekkor a polinomfüggvény játssza a $g'(x)$ szerepét);
- az integrandus exponenciális és trigonometrikus függvény szorzata (ekkor igazából mindegy a szereposztás, csak következetesen kell csinálni, mert az ilyen feladatoknál egymás után

kétszer kell parciálisan integrálni, és ha nem vagyunk következetesek, sok számolás után visszajutunk az eredeti integrálunkhoz).

Példák parciális integrálásra:

$$\int \ln x dx = \int (1)\cdot \ln x dx = \int (x)' \cdot \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

$$\int x^2 \ln x dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c$$

$$\int arctgx dx = \int (x)' \cdot arctgx dx = x arctgx - \int x\frac{1}{1+x^2}dx = x arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x arctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

$$\int \arccos\frac{x}{3}dx = \int (x)' \cdot \arccos\frac{x}{3}dx = x\arccos\frac{x}{3} - \int x\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\frac{1}{3}dx =$$

$$= x\arccos\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\int x\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}dx = x\arccos\frac{x}{3} - \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3}\int\left(\frac{-2x}{9}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= x\arccos\frac{x}{3} - \frac{3}{2}\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2 + c.$$

Racionális törtfüggvények integrálása: bármelyik alapesetben, amennyiben a számláló fokszáma nagyobb vagy egyenlő a nevező fokszámánál, a legelején mindig maradékosan osztunk. (ld. pl. az 5.3.8. feladatsor 5) feladatát, vagy az 5.3.10. feladatsor 3) példáját a változócsere után). Tehát igazából elég azt tekinteni, amikor a nevező foka nagyobb a számlálóénál.

Egyszerű alapesetek:

1) ha a nevező elsőfokú, ekkor az $\int \frac{A}{ax+b}dx = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + c$ a helyes megoldás,

2) $\int \frac{A}{(ax+b)^n}dx = \frac{A}{a(1-n)}(ax+b)^{1-n} + c$, ha $n \neq 1$,

3) konstans számláló és másodfokú nevező esetén, amennyiben a nevező diszkriminánsa $b^2 - 4ac < 0$ a következő a teendő: visszavezetjük az $\int \frac{1}{1+u^2}du = arctgu + c$ integrálra,

4) amennyiben a másodfokú nevezőnk diszkriminánsa $b^2 - 4ac = 0$, akkor a 2) esetre vezetjük vissza integrálunkat,

5) ha $b^2-4ac>0$, akkor vagy $\int \frac{1}{u^2-1}du$ alakra hozzuk, vagy parciális törtekre bontjuk az integrandust,

6) Amennyiben elsőfokú a számláló, visszavezetjük a feladatot két integrál összegére, amit az eddigiekkel könnyen ki tudunk számolni, éspedig:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c}dx,$$

Példák racionális törtfüggvény integrálására:

1) Számítsuk ki az $\int \frac{1}{x^2+6x+25}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: Tekintve, hogy nincs a nevezőnek valós gyöke, nem lehet szorzattá alakítani. A 3) alapesetünk van, így

$$\int \frac{1}{x^2+6x+25}dx=\int \frac{1}{(x+3)^2-9+25}dx=\int \frac{1}{(x+3)^2+16}dx=\int \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+3}{4}\right)^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{x+3}{4}\right)^2+1}dx=\frac{1}{4}arctg\left(\frac{x+3}{4}\right)+c$$

2) Számítsuk ki az $\int \frac{1}{x^2+6x+5}dx$ határozatlan integrált.

Megoldás: Tekintve, hogy van a nevezőnek valós gyöke, parciális törtekre bontható:

$$\int \frac{1}{x^2+6x+5}dx=\int \frac{1}{(x+1)(x+5)}dx=$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+5)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+5}\Rightarrow\frac{A(x+5)+B(x+1)}{(x+1)(x+5)}=\frac{(A+B)x+5A+B}{(x+1)(x+5)}=\frac{1}{(x+1)(x+5)}\Rightarrow$$

$$A+B=0\quad 5A+B=1$$

$$A=\frac{1}{4}\quad B=-\frac{1}{4}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+5)}dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+5}dx=\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x+5|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right|+c.$$

4. Kétváltozós függvények differenciálszámítása:

1) Legyen $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ (egy origó középpontú, 3 sugarú félgömb). Adjuk meg a következőket: D_f, R_f, szintvonalak, állapítsuk meg, hogy az értelmezési tartomány (D_f) zárt vagy nyílt, vagy egyik sem, továbbá számítsuk ki az elsőrendű parciális deriváltakat, valamint a másodrendűeket is (beleértve a vegyes másodrendű parciális deriváltakat is).

2) Legyen $f(x,y)=e^{xy}\ln y$. Határozzuk meg az összes másodrendű parciális deriváltját.

3) Igazoljuk, hogy az $f(x,y)=arctg\,\dfrac{x}{y}$ függvény kielégíti az $f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y)=0$ Laplace egyenletet.

4) Számítsuk ki az $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ másodrendű parciális deriváltjait.

5) Számítsuk ki az $f(x,y)=x^y$ másodrendű parciális deriváltjait.

6) Határozzuk meg az $f(x,y)=(x-y)^2$ függvény $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ irányú iránymenti deriváltját a $P(2,3)$ pontban.

7) Határozzuk meg az $f(x,y)=(x-y)^2$ függvény $\underline{v}=(4,3)$ irány menti deriváltját a $Q(1,2)$ pontban.

8) Írjuk fel az $f(x,y)=(x^2-6x)(y^2-4y)$ felület $Q(1,2)$ pontban vett érintősíkjának egyenletét.

9) Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit és nyeregpontjait, ha léteznek:

- $f(x,y)=2x^2+y^2-2xy+4x-2y+5$,
- $f(x,y)=(x^2-6x)(y^2-4y)$.

10) Határozzuk meg az $f(x,y)=(x^2-6x)(y^2-4y)$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét az $x=0$, $y=0$ és $x+y=6$ egyenesekkel határolt zárt tartományon.

11) Határozzuk meg a $\sin x \sin y \sin z$ szorzat maximumát, ha x, y és z egy háromszög szögei.

5. Kettősintegrál:

1) Számítsuk ki az $\iint_T e^{3x+4y} dT$ integrált, ahol $T = \{(x,y): 0 \le x \le \ln 2; 0 \le y \le \ln 3\}$.
2) Számítsuk ki az $\iint_T 2xydT$ integrált, ahol T az $y = x^2$ és $y = \sqrt{x}$ görbék által határolt zárt síkrész.
3) Határozza meg az $f(x,y) = 2y$ függvény integrálját a $0 \le x \le \frac{\pi}{4}; tgx \le y \le 1$ tartományon.
4) Számítsuk ki az $\iint_T (x^2 + 2y) dT$ integrált, ahol T az $A(1,1)$, $B(0,3)$ és $C(3,0)$ csúcspontú háromszöglap.
5) Számítsuk ki az $\iint_T (x^2 - y^2) dT$ integrált, ahol T az origó középpontú, 1 sugarú körlap $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ közé eső része (körcikke).
6) Számítsuk ki az $\iint_T \ln(x^2 + y^2) dT$ integrált, ahol T az origó középpontú, 1 és 2 sugarú körök által határolt körgyűrű.

6. Térgörbék:

1) Írjuk fel az $\underline{r}(t) = \frac{t}{1+t}\underline{i} + \frac{1+t}{t}\underline{j} + t^2\underline{k}$ térgörbe érintő egyenesének egyenletét a $t = 1$ paraméterű pontban.
2) Számítsuk ki az $\underline{r}(t) = e^{at}\cos t\,\underline{i} + e^{at}\sin t\,\underline{j} + be^{at}\underline{k}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ ívhosszát.
3) Számítsuk ki az $\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + 3\underline{j} + 3t^2\underline{k}$, $0 \le t \le 1$ ívhosszát.
4) Legyen $\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t+3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}$. Tekintsük a térgörbe $t = -1$ paraméterű pontját. Adjuk meg ebben a pontban a kísérő háromélt (triédert), a simulósík, a normálsík és a rektifikáló sík egyenletét. Számítsuk ki az adott pontbeli görbületet és torziót.
5) Legyen $\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1-t)\underline{k}$. Tekintsük a térgörbe $t = 2$ paraméterű pontját. Adjuk meg ebben a pontban a kísérő háromélt, a simulósík, a normálsík és a rektifikáló sík egyenletét. Számítsuk ki az adott pontbeli görbületet és torziót.

6. Felületek:

1) Írjuk fel annak a kúpnak a paraméteres egyenletrendszerét, melynek vezérgörbéje az $r(u) = u\underline{i} + u^4\underline{j}$ görbe és csúcspontja az $\underline{a} = 3\underline{j} + 7\underline{k}$ helyvektor végpontja.
2) Számítsuk ki az $\underline{r}(u,v) = u\cos v\,\underline{i} + u\sin v\,\underline{j} + v\underline{k}$ felület tetszőleges pontjában vett érintősíkjának egyenletét.

3) Számítsuk ki az $xy^2 + z^3 = 12$ felület $P(1,2,2)$ -ben vett érintősíkjának egyenletét.

4) Számítsuk ki az $\underline{r}(u,v) = (u^3 - 2v^2)\underline{i} + uv^2\,\underline{j} + (u^2v - u)\underline{k}$ felület $u = 1$, $v = -2$ pontjában vett érintősíkjának egyenletét.

5) Számítsuk ki az $\underline{r}(u,v) = 4chu\cos v\underline{i} + 4u\,\underline{j} + 4chu\sin v\underline{k}$, $0 \le u \le 2$ és $0 \le v \le 2\pi$ felületdarab felszínét.

6) Osztályozzuk a felületi pontokat:

- $\underline{r}(u,v) = (v + 2\cos u)\underline{i} + (v + 2\sin u)\,\underline{j} + v\underline{k}$,
- $3z + 3xz - yz + x + y = 0$.