3. Közönséges, elsőrendű, lineáris differenciálegyenletek

Elsőrendű, szétválasztható d.e. Határozzuk meg a megoldásokat:

1. $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1+x^2}y'$

   a) triv. mo.: $y = \pm 1$
   b) nem triv.: $y(x) = \sin(\text{arsh}x + c)$

2. $-\sqrt{1-x^2}y' = \sqrt{1-y^2}$

   a) triv. mo.: $y = \pm 1$
   b) nem. triv.: $y = \sin(\arccos x + c)$

3. $(x+1)y' = y - 2$, 1. ált. mo=?, 2. $y(-3) = 1$ kezdeti érték feladat megoldása ?

   a) $y = 2$
   b) nem triv.:$y = 2 + c(x+1)$
   kezd. mo.: $y = 2 + \frac{1}{2}(x+1)$

4. $(x^2-1)yy' = \dfrac{1}{(y^2+1)^2}$

   nem triv. mo.: $y(x) = \pm\sqrt{\sqrt[3]{3\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)} + c - 1}$

5. $y' = \dfrac{xy}{x^2-1}$, 1. ált mo.=?, 2. $y(\sqrt{2}) = 1$ kezdeti érték feladat ?

   a) nem triv
   b) nem triv.: $y(x) = c\sqrt{x^2-1}$
   kezd. mo.: $y = \sqrt{x^2-1}$, azaz $x^2 + y^2 = 1$

6. $y' = (y^2+1)\sqrt{1+2x}$

   a) nincs triv. mo., $y^2 + 1 \neq 0$
   b) nem triv. mo.: $y = \text{tg}\left(\dfrac{1}{3}(1+2x)^{3/2} + c\right)$

7. $(1-x)\text{th}(y)y' = 1$ ált mo. és $y(0) = 0$ kezdeti érték feladat mo.?

   nem triv mo.: $y = \text{arch}\dfrac{c}{1-x}$
   kezd. mo.: $y = \text{arch}\dfrac{1}{1-x}$

8. $y' = \dfrac{x+1}{y+2}$

9. $y\ln y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$, $y(1) = 1$

   a) $y = 1$ $(y \neq 0)$
   b) $y(x) = e^{\frac{c}{x}}$

10. $y' = \ln x \sin y$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$

    a) $\sin y = 0$, $y = k\pi$
    b) nem triv.: $\ln\text{tg}\dfrac{y}{2} = x\ln x - x + c$
    kezd. mo.: $y = 1$

11. $y' = \dfrac{\cos^2 y}{1+x^2}$

    mo.: $y = \text{arctg}(\text{arctg}x + c)$

12. Az $y' = 3(x-1)^2y$ differenciálegyenletet kielégítő $y(x)$ függvénynek mennyi lesz az értéke a 2 helyen, ha $y(1) = 2$?

13. Mennyi lesz az $y(x)$ függvény értéke az $x = 0$ pontban, ha tudjuk, hogy y kielégíti a $y' = \dfrac{\cos^2 y}{1+x^2}$ differenciálegyenletet, és $y(1) = 0$?

14. Az $y' = (x-1)^2\cos^2(y)$ differenciálegyenletet kielégítő $y(x)$ függvénynek mennyi lesz a értéke az 2 helyen, ha $y(1) = 0$?

15. Az $y' = (y^2+1)e^{-2x}$ differenciálegyenletet kielégítő $y(x)$ függvénynek mennyi lesz az értéke az 1 helyen, ha $y(0) = 0$?

16. $yy' = \dfrac{1}{x^2+3x}\cdot\dfrac{1}{\cos(y^2)}$

17. $(x^2-7x+12)yy' = (1+y^2)^5$

18. $(x^2-7x+12)y' = 13\sqrt{1-y^2}(2x-6)$

19. $(x^2-8x+15)y' = 5(1+y^2)(4x-7)$

Elsőrendű, lineáris d.e.

20. $xy' + 2y = x^4$, a) ált. mo., b) $y(1) = -2$

    ált. mo.: $y = \dfrac{c}{x^2} + \dfrac{x^4}{6}$

    kezd. mo.: $y = -\dfrac{13}{6}\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{x^4}{6}$

21. $\cos(x)y' = \sin(x)y + \cos^2 x$

    mo.: $\dfrac{1}{\cos x}\left(c + \dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{\sin x}{2}$

22. $y' + x^2y = x^2$, $y(2) = 1$

    ált. mo.: $y(x) = ce^{-\frac{x^3}{3}} + 1$
    kezd. mo.: $y(x) = +1$ $(c = 0)$

23. $y' - 2xy = x^3$

    mo.: $y = ce^{x^2} + \dfrac{1}{2}(x^2+1)$

24. $y' + y\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$, $y(0) = 3$

    ált. mo.: $y = ce^{-\sin x} + \sin x - 1$
    kezd. mo.: $y = 4e^{-\sin x} + \sin x - 1$

25. $y' - \dfrac{y}{2x} = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-5x+6}$

    mo.: $y = \sqrt{x}\left(c + \ln\dfrac{x-3}{x-2}\right)$

26. $(x-1)y' + \frac{1}{x+1}y = \frac{x-1}{x+1}$

    hom. mo.: $y_h(x) = c\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

    part. mo.: $y_p = \mathrm{arch}x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

27. $y' + \frac{1}{x^3}y = xe^{\frac{1}{2x^2}}\sin x$

    hom. mo.: $y_h(x) = ce^{\frac{1}{2x^2}}$

    part. mo.: $y_p = (-x\cos x + \sin x)e^{\frac{1}{2x^2}}$

28. $y' + e^x y = e^{e^x}e^x$

    hom. mo.: $y_h = \frac{c}{e^{e^x}}$

    part. mo.: $y_p = \frac{1}{2}e^{2e^x}$

29. $y' + \cos(x)y = \frac{x\sin(x)}{e^{\sin(x)}}$

30. $y' - 4\frac{x}{x^2+1}y = x(1+x^2)^2\cos x$

31. $y' + 3\mathrm{tg}(x)\,y = x\cos^4 x$