Matematika 2 építészmérnököknek

3. gyakorlat (2004. 02. 25. illetve 26.)

Differenciálegyenletek I.

(gyak. vez.: Rudas Anna)

A közönséges, elsőrendű differenciálegyenletek közül a legegyszerűbb két típus az ún. *szeparálható* (vagy *szétválasztható változójú*), illetve a *lineáris*. A két típus leírása és megoldásuk menetének közérthető megfogalmazása található az előadó, Dr Barabás Béla honlapján (2. előadás címen), ezért azt általánosságban nem részletezem, hanem lássuk a példákat!

1. FELADAT: $y^2 - 1 = (2y + xy)y'$

   MEGOLDÁS: Rendezzük úgy az egyenletet, hogy az ismeretlen függvény deriváltja (y') szerepeljen csak az egyik oldalon:

   $$y' = \frac{y^2-1}{y} \cdot \frac{1}{2+x},$$

   látjuk, hogy a derivált előáll egy csak x-től és egy csak y-tól függő tag szorzataként. Ilyenkor mondjuk, hogy a változók szétválaszthatók: írjuk be y' helyére, hogy $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, és fogadjuk el, hogy ez az eddig csak szimbolikusnak tekintett jelölés valódi hányadosnak felel meg, ennek megfelelően "megszorozhatjuk" mindkét oldalt dx-szel, és így kapjuk (az y-os tagokat az egyik, az x-eseket a másik oldalra rendezve):

   $$\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y = \frac{1}{2+x}\mathrm{d}x,$$

   ahonnan már csak egy lépés, hogy mindkét oldal elé egy integráljelet írjunk, és közben nagyot nyelve elhiggyük, hogy ez is jogos:

   $$\int \frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{2+x}\mathrm{d}x.$$

   Elvégezve az integrálást mindkét oldalon azt kapjuk, hogy

   $$\frac{1}{2}\ln|y^2-1| = \ln|2+x| + c_1,$$

   ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ bármilyen valós konstans lehet. (A későbbiekben látjuk, miért indexeltem 1-essel, a végső megoldásban fogom a c jelölést használni a konstansra.) Átrendezve ezt úgy, hogy y legyen a baloldalon:

   $$|y^2-1| = c_2(2+x)^2, \quad \text{itt } c_2 = e^{c_1} \text{ egy új konstans: } c_2 > 0$$

   $$y^2 = \pm c_2(2+x)^2 + 1$$

   $$y = \pm\sqrt{c(2+x)^2+1} = \pm\sqrt{cx^2+4cx+4c+1},$$

   ahol ahhoz, hogy ennek legyen értelme minden $x \in \mathbb{R}$-re, ki kell kötni, hogy $c > 0$. Ez a függvény az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása.

   ELLENŐRZÉS: Hogy meggyőződjünk arról, valóban megoldáshoz jutottunk, egyszerűen be kell helyettesíteni a kapott y megoldást az eredeti egyenletbe. Azért ehhez egy kicsit számolni kell:

   $$y^2 - 1 = cx^2 + 4cx + 4c, \quad \text{ez volt a baloldal,}$$

   $$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2cx+4c}{\pm\sqrt{cx^2+4cx+4c+1}} = \frac{cx+2c}{\pm\sqrt{cx^2+4cx+4c+1}},$$

   ezt meg kell szorozni $(2+x)y$-nal, hogy megkapjuk a jobboldalt:

   $$(2+x)yy' = 2cx + 4c + cx^2 + 2cx = cx^2 + 4cx + 4c,$$

   a két oldal tehát valóban egyenlő.

2. FELADAT: $xy' + y = y^2$

   MEGOLDÁS:

   $$y' = (y^2 - y)\frac{1}{x}$$

   $$\int \frac{1}{y^2-y}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

   $$\mathrm{arth}(2y-1) = \frac{1}{2}\ln|x| + c_1$$

   $$2y - 1 = \tanh(\frac{1}{2}\ln|x| + c_1)$$

   beírva a *tanh* függvény definícióját kapjuk, hogy

   $$2y - 1 = \frac{e^{c_1}|x| - e^{-c_1}}{e^{c_1}|x| + e^{-c_1}}$$

de e^{c_1} csak egy másik konstans, jelöljük mondjuk c-vel:

$$2y-1=\frac{c|x|-\frac{1}{c}}{c|x|+\frac{1}{c}}$$

$$y=\frac{1}{2}\frac{c|x|-\frac{1}{c}}{c|x|+\frac{1}{c}}+\frac{1}{2}.$$

3. FELADAT: $2(xy+x-y-1)=(x^2-2x)y'$

   MEGOLDÁS:

$$(2x-2)y+2x-2=(x^2-2x)y'$$

$$y'-\frac{2x-2}{x^2-2x}y=\frac{2x-2}{x^2-2x},$$

ezzel $y'+p(x)y=q(x)$ alakra hoztuk, amiről tudjuk, hogy lineáris, elsőrendű, közönséges differenciálegyenlet, és a megoldás menete is ismert.

homogén általános rész:

$$y'=\frac{2x-2}{x^2-2x}y$$

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\frac{2x-2}{x^2-2x}\mathrm{d}x$$

$$\ln y=2\ln x-2\mathrm{arth}(x-1)+c_1$$

Az area tangens hiperbolikus függvény másik alakjára áttérve ($\mathrm{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$)

$$\ln y=2\ln x-\ln\frac{x}{2-x}+c_1,$$

tehát a homogén rész:

$$y_h=cx(2-x).$$

inhomogén partikuláris rész: mielőtt fognánk és vakon alkalmazni kezdenénk a "receptet", nézzünk rá az egyenletre, nem találunk-e egyből egy megoldást? Ebben az esetben rögtön látszik az, hogy az $y=-1$ konstans függvény megoldja az egyenletet, behelyettesztve mindkét oldal $\frac{2x-2}{x^2-2x}$ lesz. Tehát

$$y_{ih}=-1.$$

inhomogén általános:

$$y=cx(2-x)-1.$$

4. FELADAT:

   MEGOLDÁS:

5. FELADAT:

   MEGOLDÁS:

6. FELADAT:

   MEGOLDÁS:

7. FELADAT:

   MEGOLDÁS: