1. a. Adja az $y^2-1=(2y+xy)\cdot y'$ egyenlet általános megoldását!
   b. Adja meg az origón átmenő megoldásgörbét!

Megoldás: a.

$$y'=\frac{y^2-1}{(2y+xy)},\quad y'=\frac{y^2-1}{y(2+x)},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{y(2+x)},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{y(2+x)},\quad \int\frac{y}{y^2-1}dy=\int\frac{dx}{(2+x)}$$

$\frac{1}{2}\int\frac{2y}{y^2-1}dy=\int\frac{dx}{(2+x)}$, $\ln\left|y^2-1\right|=2\cdot\ln|2+x|+C$, ahol C tetszőleges való szám

$$\ln\left|y^2-1\right|=\ln(2+x)^2+C,\ \ln\left|y^2-1\right|=\ln(2+x)^2+\ln C,\ \ C>0\ C\in R,$$

$$\ln\left|y^2-1\right|=\ln C(2+x)^2,\ \left|y^2-1\right|=C(2+x)^2,\ C>0\ C\in R,$$

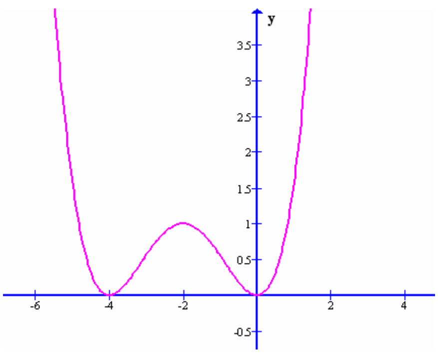
innen az általános megoldás $\boxed{y^2-1=C(2+x)^2}$ ahol C tetszőleges való szám, de $C\neq 0$.

Külön kell vizsgálni azt az esetet, amikor a nevező nulla, vagyis $y(2+x)=0$, ekkor vagy $y=0$ vagy $x=-2$, valamint azt a megoldást ahol $C=0$. Az $y=0$ nem megoldása a diffegyenletnek.
$C=0$ esetben $y^2=1$, vagyis $y\equiv 1$, $y\equiv -1$, megoldásai az eredeti egyenletnek, ezek is reguláris megoldások.

b. A megoldásgörbe átmegy az origón, tehát $y(0)=0$, behelyettesítve az általános megoldásba

$0-1=C(2+0)^2$, $-1=4C$, $C=-\frac{1}{4}$, vagyis a megoldásgörbe $y^2-1=-\frac{1}{4}(2+x)^2$,

$$\boxed{y^2=1-\left(\frac{2+x}{2}\right)^2}$$



2. a. Adja meg az $x\cdot y'+y=y^2$ differenciálegyenlet általános megoldását!
   b. Adja meg a $(0,1)$ ponton átmenő megoldásgörbét!

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=y^2-y,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-y}{x},\quad \int\frac{dy}{y^2-y}=\int\frac{dx}{x},\quad \int\frac{dy}{y^2-y}=\int\frac{dx}{x}$$

Integrálás parciális törtekre bontással $\int\frac{dy}{y^2-y}=\int\frac{1}{y(y-1)}dy=\int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\right)\cdot dy=\ln|y-1|-\ln|y|=\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|$

Tehát, $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|=\ln|x|+C$, $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|=\ln|x|+\ln C$ (C>0), $\left|\frac{y-1}{y}\right|=c|x|$,

$$\frac{y-1}{y}=Cx\qquad y-1=Cxy,\ y=1+Cxy,\qquad y-Cxy=1,\qquad y(1-Cx)=1,$$

Az általános megoldás $\boxed{y=\frac{1}{1-Cx}}$ ahol $C\in R$ de $C\neq 0$

Külön kell vizsgálni azt az esetet, amikor a nevező nulla volt az átrendezésénél, vagyis $y(y-1)=0$, ekkor vagy $y=0$ vagy $y=1$. Ha behelyettesítjük az eredeti egyenletbe $y=0$ és az $y=1$ értékeket, akkor látjuk, hogy mindkettő megoldása az eredeti egyenletnek, mellyel ki kell egészíteni az általános megoldást!
De az $y=1$ megoldást hozzávehetjük az általános megoldáshoz úgy, hogy C=0 értékre adódik.
Tehát az általános megoldás

Az általános megoldás $\boxed{y=\frac{1}{1-Cx}}$ ahol $C\in R$ és $\boxed{y\equiv 0}$ melyet szinguláris megoldásnak nevezünk mert nem adódik az általános megoldásból egyetlen $C\in R$ helyettesítéssel sem. Tehát az $\boxed{y\equiv 1}$ egy reguláris míg az $\boxed{y\equiv 0}$ szinguláris megoldása a differenciálegyenletnek.

3. Állapítsa meg, hogy milyen típusba (típusokba) tartozik a $2(xy+x-y-1)=(x^2-2x)\cdot y'$ differenciálegyenlet, adja meg valamelyik megoldást

Megoldás:
Szétválasztható változójú egyenletként felfogva

$$2(xy+x-y-1)=(x^2-2x)\cdot\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{(x^2-2x)}{2(xy+x-y-1)}=\frac{x(x-2)}{2(x-1)(y+1)},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x(x-2)}{2(x-1)(y+1)}, \qquad \int(y+1)\,dy=\int\frac{x(x-2)}{2(x-1)}dx, \qquad \text{vagy}$$

Vagy inhomogén lineáris egyenletként felfogva:

$$(x^2-2x)\cdot y'-2(xy+x-y-1)=0$$

$$(x^2-2x)\cdot y'+(-2xy-2x+2y+2)=0, \qquad x(x-2)\cdot y'+2y(1-x)=2(x+1)$$

4. Adja az $(x+xy^2)\cdot y'=3$ egyenlet általános megoldását!

$$(x+xy^2)\cdot\frac{dy}{dx}=3, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{3}{(x+xy^2)}, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{3}{(x+xy^2)}=\frac{3}{x(1+y^2)}, \qquad \int(1+y^2)\,dy=\int\frac{3}{x}dx$$

$$y+\frac{y^3}{3}=3\ln|x|+C,$$

5. Állapítsa meg, hogy milyen típusba (típusokba) tartozik a $\sqrt{1-y^2}=(1-x^2)\,y'$ differenciálegyenlet!
Megoldás: Szétválasztható változójú:

$$\sqrt{1-y^2}=(1-x^2)\frac{dy}{dx}, \qquad \int\frac{1}{(1-x^2)}dx=\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

6. a. Adja meg az $y\cdot y'=\frac{e^x}{1+e^x}$ differenciálegyenlet általános megoldását!
b. Adja meg a $(0,1)$ ponton átmenő megoldásgörbét!

$$\frac{dy}{dx}y=\frac{e^x}{1+e^x} \qquad \int y\cdot dy=\int\frac{e^x}{1+e^x}dx, \qquad \frac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+C, \qquad \frac{1}{2}=\ln(2)+C, \quad \boxed{C=\frac{1}{2}-\ln 2}$$

7. a. Állapítsa meg, hogy milyen típusba (típusokba) tartozik a $y' - xy = x$ differenciálegyenlet és adja meg az általános megoldását!
b. Adja meg a $(0,1)$ ponton átmenő megoldásgörbét!

Inhomogén lineáris egyenletként kezelve a megoldás: $y' - xy = x$
Inhomogén egyenlethez tartozó homogén rész: $y' - xy = 0$

$\frac{dy}{dx} = xy$ $\quad \int \frac{dy}{y} = \int x dx$, $\quad \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$, $\quad |y| = e^{\frac{x^2}{2}+C}$, $\quad |y| = e^C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$, nevezzük el $e^C = C$ ekkor

$C > 0$, de ha C tetszőleges valós szám, akkor $y = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük $y_{inh,part} = C(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ alakban

$y = C(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$, $y' = C'(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + C(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}(x)$, ezt helyettesítve az eredeti egyenletbe

$$C'(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + C(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}(x) - x \cdot C(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = x$$

$$C'(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = x, \quad C'(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad C(x) = -\int (-x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$y_{inh,part} = -e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = -1$$

$$\boxed{y_{inh,ált} = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1}$$

$\boxed{1 = Ce^0 - 1}$ $\quad \boxed{1 = C - 1}$, $\boxed{C = 2}$

Szeparálható egyenletként kezelve a megoldás: $y' - xy = x$

$y' = x + xy = x(1+y)$, $\quad \frac{dy}{dx} = x(1+y)$, $\quad \int \frac{dy}{(1+y)} = \int x dx$, $\quad \ln|1+y| = \frac{x^2}{2} + C$, $\quad |1+y| = e^{\frac{x^2}{2}+C} = e^C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

$1 + y = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$, $\quad \boxed{y = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - 1}$,