

Analízis 3 BSC, gyakorlat

10. hét

1. Legyen μ_h a $h(x) = [x]$ függvény által meghatározott Lebesgue-Stieltjes mérték, és $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Mikor teljesül, hogy $f = g$ μ_h majdnem mindenütt?
2. Legyen μ az f függvény által meghatározott Lebesgue-Stieltjes mérték. Igazoljuk, hogy $\mu(\{x\}) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha f folytonos az x pontban.
3. Melyik erősebb?
 - (i) f majdnem mindenütt folytonos;
 - (ii) f majdnem mindenütt megegyezik egy folytonos függvénnyel.
4. Igazoljuk, hogy az alábbi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ún. Riemann függvényt Lebesgue-majdnem mindenütt folytonos.
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \ x = \frac{m}{n}, \text{ ahol } n \in \mathbb{N}, \ m \in \mathbb{Z}, \ (m, n) = 1 \end{cases}$$
5. Legyen $(X, \mathfrak{M})$ mérhető tér, $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mérhető $n = 1, 2, \dots$. Bizonyítsuk be, hogy
 - (a) $\{x \in X : \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \text{ korlátos}\}$ mérhető;
 - (b) $\{x \in X : \exists n_k \text{ részsorozat, hogy } \lim f_{n_k}(x) = \infty\}$ mérhető!
6. Igaz-e, hogy
 - (a) Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, akkor mérhető.
 - (b) Ha f^n mérhető, akkor f mérhető.
7. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén legyen $n(c)$ az $f(x) = c$ egyenlet gyökeinek számát. Igazoljuk, hogy a $c \mapsto n(c)$ függvény mérhető.
8. Legyen $\mathfrak{M}$ az $\mathbb{R}$ -en a $\mathbb{Q}$ részhalmazai által generált σ algebra. Van-e olyan f függvény, ami Borel-mérhető, de nem $\mathfrak{M}$ -mérhető, és fordítva?