

Analízis 3 BSC, gyakorlat

9. hét

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $A_1, A_2 \dots$ olyan mérhető halmazok, melyekre $0 < \mu(A_1) = \mu(A_2) = \dots$, és $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, akkor $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ pozitív mértékű!
2. Határozzuk meg a síkbeli egységnégyzet azon részhalmazának Lebesgue-mértékét, amely olyan pontokból áll, melyeknek Descartes- és polárkoordinátái irracionálisak.
3. Határozzuk meg a $[0, 1]$ szakasz azon részhalmazának Lebesgue-mértékét, amely olyan számokból áll, amelyeknek tizedestört alakjában előbb áll a 2 számjegy, mint a 3 számjegy.
4. Legyen X a sík egységnégyzete, és $\mathcal{S}$ a

$$T_{ab} = \{(x, y) : 0 \leq a \leq x < b \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

alakú téglalapok halmaza. Legyen $\mu(T_{ab}) := b - a$. Bizonyítsuk be, hogy a

$$T = \{(x, y) : x = y\}$$

halmaz nem mérhető. Mi lesz a külső mértéke?

5. Az alábbiak közül melyik lesz külső mérték:
 - (a) $\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_0 \in A, \\ 0, & \text{ha } x_0 \notin A, \end{cases}$,
 - (b) $\mu(A) = 1$, minden A halmaz esetén;
 - (c) $\mu(\{1\}) = 10$, $\mu(\{2\}) = 10$, $\mu(\{1, 2\}) = 1$,
 - (d) egy 10×10 -es rács részhalmazain $\mu(A)$ azon oszlopok száma, amelyben van A -beli pont.
6. Legyen μ külső mérték. Igazoljuk, hogy ha B mérhető, $B \subset A$ és $\mu(A) = \mu(B) < \infty$, akkor A is mérhető.

7. Legyen X metrikus tér, $x_n \in X$, $a_n \geq 0$, $\sum a_n < \infty$ és

$$\mu(A) = \sum_{x_n \in A}, \quad \forall A \subset X.$$

Mutassuk meg, hogy μ Radon mérték.

8. Legyen μ mérték a $P(\mathbb{R})$ σ -algebrán, $\mu(\mathbb{R}) = 1$, és minden $X \subset \mathbb{R}$ halmazra $\mu(X) = 0$ vagy $\mu(X) = 1$. Bizonyítsuk be, hogy létezik $p \in \mathbb{R}$, hogy

$$\mu(X) = \begin{cases} 1, & \text{ha } p \in X \\ 0, & \text{ha } p \notin X \end{cases}$$

9. Határozzuk meg a $h(x) = [x]$ függvény által meghatározott μ_h Lebesgue-Stieltjes mértéket.