

Analízis 3 BSC, gyakorlat

8. hét

1. Adjuk meg a 3 elemű alaphalmazon az összes σ -algebrát.
2. Legfeljebb hány halmaz képezhető 10 halmazból unió és komplementer-képzés ismételt alkalmazásával? Azaz, legfeljebb hány elemű a 10 halmaz által generált σ -algebra.
3. Igazoljuk, hogy bármilyen σ -algebrában a halmazok elemszáma mérték.
4. Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérben legyen $\mu(X) = 1$. Mutassuk meg, hogy ha az $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ halmazok X minden pontját legalább k -szor lefedik, akkor létezik i , melyre $\mu(A_i) \geq \frac{k}{n}$.
5. Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérben $A, B \in \mathcal{A}$ esetén legyen $A \sim B$, ha $\mu(A \Delta B) = 0$, ahol $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Mutassuk meg, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció, és az ekvivalenciaosztályokon a $d(\overline{A}, \overline{B}) = \mu(A \Delta B)$ leképezés metrika.
6. Legyen X egy nem megszámlálható halmaz. Igazoljuk, hogy

$$\mathcal{A} := \{A \subset X : A \text{ megszámlálható vagy } X \setminus A \text{ megszámlálható}\}$$

σ -algebra. Mutassuk meg, hogy a

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{ha } A \text{ megszámlálható} \\ 1, & \text{ha } X \setminus A \text{ megszámlálható} \end{cases}$$

halmazfüggvény mérték az $\mathcal{A}$ halmazon. Mi lesz a generált külső mérték, és mik lesznek a mérhető halmazok?

7. Az A_n halmazzsorozat esetén

$$\begin{aligned} \limsup A_n &= \{x \in X : x \in A_n \text{ végtelen sok } n \text{ esetén}\}, \\ \liminf A_n &= \{x \in X : x \in A_n \text{ véges } n \text{ kivételével}\}. \end{aligned}$$

Igazoljuk, hogy $\liminf A_n \subset \limsup A_n$, továbbá, hogy

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

8. Mutassuk meg, hogy minden A_n halmazzsorozat és μ mérték esetén

$$\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n),$$

továbbá, hogy ha létezik olyan n , amelyre

$$\mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right),$$

akkor

$$\mu(\limsup A_n) \geq \limsup \mu(A_n).$$

Igazoljuk, hogy szükséges a feltétel.

9. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}$ nullmértékű.

10. Definiáljuk a Cantor-halmazt a következőképpen: Legyen

$$G_k = [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{3^k} \left(\frac{3i-2}{3^{k+1}}, \frac{3i-1}{3^{k+1}} \right),$$

és

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} G_k.$$

Mutassuk meg, hogy $\mathcal{C}$ kontinuum számosságú. Mennyi a mértéke?

11. Legyen $A = \left\{ x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots \in [0, 1] : \frac{\text{1-ek száma } n\text{-ig}}{\text{0-k száma } n\text{-ig}} \rightarrow 1 \right\}$. Bizonyítsuk be, hogy A Lebesgue-mérhető.