

Analízis 3 BSC, gyakorlat

5. hét

1. (a) Legyen f egy G tartományon reguláris függvény. Igazoljuk, hogy ha $f(z) \not\equiv 0$, akkor minden $z_0 \in G$ esetén létezik $\delta > 0$, amelyre $0 < |z - z_0| < \delta$ esetén $f(z) \neq 0$.
(b) Bizonyítsuk be, hogy ha f és g reguláris függvény a G tartományon, továbbá $f(z_n) = g(z_n)$, ahol $z_n \rightarrow z^* \in G$, akkor $f(z) = g(z)$ minden $z \in G$ esetén.

2. Létezik-e olyan $D(0, 1)$ körön reguláris függvény, amelyre

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \quad \text{ha } n \in \mathbb{N}?$$

3. Mutassuk meg, hogy ha f reguláris a 0 középpontú 1 sugarú nyit kör-lapon, továbbá $|f(z)| \leq 1$, és $f(0) = 0$, akkor $|f(z)| \leq |z|$ és $|f'(0)| \leq 1$.

4. Számoljuk ki az

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + 1}$$

integrált.

5. A $\pi \operatorname{ctg} \pi z / z^4$ függvény megfelelő görbementi integrálja segítségével számoljuk ki az

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

összeget.

6. Hány gyöke van az alábbi f függvényeknek a következő G tartományokon?

- (a) $f(z) = 3e^2 - z$, $G = \{z : |z| \leq 1\}$;
- (b) $f(z) = 1/3e^z - z$, $G = \{z : |z| \leq 1\}$;
- (c) $f(z) = z^4 - 5z + 1$, $G = \{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$;
- (d) $f(z) = z^4 + z^3 + 1$, G a jobb felső síknegyed.