

Analízis 3 BSC, gyakorlat

3. hét

1. Definiáljunk egy olyan γ görbét, amelynek képe az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellipszis pozitív irányítással. Keressünk olyan $\tilde{\gamma}$ görbét, amelyre $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z} dz$, és ennek segítségével lássuk be, hogy

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \frac{2\pi}{ab}.$$

2. Legyen n egy pozitív egész szám.

- (a) Számítsuk ki az

$$\int_{|z|=1} \left(z - \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}$$

integrált.

- (b) A fenti integrálban a $z \mapsto e^{it}$ helyettesítést alkalmazva számítsuk ki az

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx$$

integrált.

3. Számoljuk ki a konvergenciasugarat, írjuk fel az összegfüggvényt és ellenőrizzük, hogy a hatványsor a legnagyobb olyan körlapon ahol nincs szingularitás előállítja a függvényt:

$$\text{a) } \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}, \quad \text{b) } \sum_1^{\infty} \frac{z^{2n}}{3^n}$$

4. Írjuk fel a $z_0 = 0$ bázispontú Taylor-sort, adjuk meg a konvergenciasugarat:

$$\text{a) } \ln(z - i), \quad \text{b) } \frac{z}{z^2 + z - 6}$$

5. A Taylor-sor felírása **nélkül** mondjuk meg, hol fogja a $z_0 = 0$ bázispontú Taylor-sor előállítani f -et:

$$\frac{1}{\cos z}, \quad \operatorname{th} z, \quad \ln(2 + z - z^2) \quad [|z| < 1 \Rightarrow 2 + z - z^2 \notin (-\infty, 0]]$$

6. f egész, nem korlátos, nagy $|z|$ -re alulról korlátos: $\exists c > 0 \exists K > 0$, hogy $|f(z)| \geq c \quad \forall |z| > K$ -ra.
Bizonyítsuk be: f -nek van gyöke.