

Analízis 3 BSC, gyakorlat

11. hét

1. Igazoljuk, hogy a Lebesgue-féle majorált konvergencia tétel igaz marad, ha $f_n \rightarrow f$ mm. helyett $f_n \rightarrow f$ mértékben.

2. Adjuk meg az

$$\int_{[0,n]} e^{-2x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n d\lambda(x)$$

sorozat határértékét $n \rightarrow \infty$ esetén.

3. Határozzuk meg a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}]} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} dx$$

határértéket.

4. Vizsgáljuk $a > 0$ illetve $a = 0$ esetén a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty \frac{n^2 x e^{-n^2 x^2}}{1 + x^2} dx$$

határértékeket.

5. Keressünk olyan $f \in C(0, 1]$ függvényt, amelyre $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{[\delta, 1]} f$ létezik és véges, de f nem integrálható a $[0, 1]$ intervallumon.

6. Számítsuk ki az

$$\int_V \frac{\cos x - 1}{x^2} d\lambda$$

integrált, ahol V a sík $y = x^2$, $x \in [0, 1]$ parabola és az x tengely közötti része, λ pedig a 2 dimenziós Lebesgue-mérték.

7. Legyen $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq y \\ 1, & \text{ha } x = y \end{cases}$$

képlettel definiálva, továbbá legyen λ a Lebesgue mérték, μ pedig a számlálómérték. Igazoljuk, hogy f mérhető a szorzatmértékre nézve. Számoljuk ki az

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x,y) \, d\lambda(y) \right) d\mu(x)$$

illetve az

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\lambda(y)$$

integrálokat.