

Analízis 3 BSC, gyakorlat

11. hét

1. Legyenek az f_n függvények a $[0, 1]$ intervallumon a következőképpen definiálva: ha $n = 2^k + j$, $0 \leq j < 2^k$, akkor legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [j/2^k, (j+1)/2^k], \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy ha f_n mértékben tart az azonosan 0 függvényhez, de $f_n(x)$ egyetlen $x \in [0, 1]$ esetén sem konvergens.

2. Konvergens-e az $f_n(x) := \frac{x}{n}$ mértékben, illetve majdnem mindenütt az alábbi mértékek szerint.

- a) Lebesgue mérték a számegyenesen
- b) Lebesgue mérték a $[-a, a]$ intervallumon

c) $\mu(H) := \int_H e^{-x^2} d\lambda(x)$

3. Legyen δ_a az a pontba koncentrált Dirac mérték, λ a Lebesgue-mérték a számegyenesen, és $\mu_{\mathbb{Z}}$ az egész számok számlálómértéke, azaz $H \subset \mathbb{R}$ esetén $\mu_{\mathbb{Z}}(H) = |H \cap \mathbb{Z}|$. Számoljuk ki a következő integrálokat!

a) $\int_{\mathbb{R}} (x^2 + 3x) d\left(\frac{\delta_0 + \delta_1}{2}\right);$

b) $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} d(\lambda + \delta_0);$

c) $\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{1}{x^2} d\mu_{\mathbb{Z}}.$

4. Legyen A és B Lebesgue-mérhető halmaz, és tegyük fel, hogy $\lambda(A), \lambda(B) < \infty$. Legyen továbbá

$$f(x) := \lambda(A \cap (B + x)).$$

Számoljuk ki az $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda(x)$ integrált.

5. Legyen μ_f az

$$f := \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x < 0 \\ 2x, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ x^2 + 2, & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}$$

függvényhez tartozó Lebesgue-Stieltjes mérték, és legyen $g(x) := x^3 + 3x + 1$. Számoljuk ki az

$$\int_{[0,1]} g(x) d\mu_f(x), \quad \int_{(0,1)} g(x) d\mu_f(x), \quad \int_{[-1,2]} g(x) d\mu_f(x)$$

integrálokat.

6. Mutassuk meg, hogy az $\frac{\sin x}{x}$ függvénynek létezik improprius integrálja az $\mathbb{R}$ halmazon, de a függvény nem L^1 -beli.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\int_X |f| d\mu = \left| \int_X f d\mu \right|,$$

akkor $f \geq 0$ μ -mm, vagy $f \leq 0$ μ -mm.

8. Bizonyítsuk be, hogy a végtelen mértékű X halmazon értelmezett nem-negatív korlátos f mérhető függvény pontosan akkor L^1 -beli, ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu \left(x \in X : f(x) > \frac{1}{2^n} \right) < \infty.$$

9. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $\mu(X) < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy az $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény pontosan akkor integrálható, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu(x \in X : f(x) \geq 2^n) < \infty.$$

10. Tekintsük a $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérrel, ahol $\mu(\mathbb{R}) = 1$, és tegyük fel, hogy $\int_{\mathbb{R}} x d\mu(x) = 0$, és valamilyen $k \in \mathbb{N}$ számra $\int_{\mathbb{R}} |x^k| d\mu(x) < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-1} \int_{|x| \leq n} x d\mu(x) = 0.$$