Építőmérnöki Matematika A2 vizsga, 2016. Január 12.

Megoldások

1. (3+4 pont) Döntse el a következő sorozatokról, hogy konvergensek-e vagy pedig divergensek:

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{4^n+n^2}, \qquad (b)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln(k)}$$

Azt is részletesen írja le, hogy melyik kritériumot használta és hogyan!

Megoldás:

(a) $a_n=(-1)^n\frac{2^{2n}}{4^n+n^2}$, ekkor $|a_n|=\frac{2^{2n}}{4^n+n^2}=\frac{4^n}{4^n+n^2}$. Továbbá

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^n+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^2/4^n}=\frac{1}{1+0}=1$$

$\lim_{n\to\infty}|a_n|\neq 0$, így $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, így a divergencia-kritérium alapján $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergens.

(b) Az integál kritériumot fogjuk használni. $f(x)=\frac{1}{x\ln(x)}$ függvény nemnegatív és monoton csökkenő (hisz x és $\ln(x)$ is nemnegatívak és monoton növekvőek, ha $x\geq 2$).
Tudjuk, hogy $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(\ln(x))=\frac{1}{x\ln(x)}=f(x)$, tehát

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\left[\ln(\ln(x))\right]_2^b=\infty,$$

és így az integál kritérium miatt $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln(k)}$ is divergens.

2. (3+2+2 pont) A hányados-kritérium segítségével döntse el, hogy mi a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}(x+1)^k$ hatványsor konvergencia-sugara. Milyen $f(x)$ függvényt állít elő ez a hatványsor? Írja fel az $f'(x)$ derivált függvény $a=-1$ alappont körüli Taylor-sorának első négy nemnulla tagját.

Megoldás: $a_k=\frac{2^k}{k!}(x+1)^k$, tehát

$$q=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\lim_{k\to\infty}\frac{2}{k+1}|x+1|=0,$$

tehát $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}(x+1)^k$ minden x esetén konvergens, tehát a konvergencia-sugár $R=\infty$.
Tudjuk: $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$, tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}(x+1)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(2(x+1))^k=e^{2(x+1)}=e^{2x+2}.$$

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}(x+1)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+1)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}\cdot k\cdot(x+1)^{k-1}=$$

$$\frac{2^0}{0!}\cdot 0\cdot(x+1)^{0-1}+\frac{2^1}{1!}\cdot 1\cdot(x+1)^{1-1}+\frac{2^2}{2!}\cdot 2\cdot(x+1)^{2-1}+\frac{2^3}{3!}\cdot 3\cdot(x+1)^{3-1}+\frac{2^4}{4!}\cdot 4\cdot(x+1)^{4-1}+\cdots=$$

$$2\cdot(x+1)^0+4(x+1)^1+4(x+1)^2+\frac{8}{3}(x+1)^3+\ldots$$

3. (4 + 2 pont) Határozza meg az a_0, a_1, b_1 számokat oly módon, hogy az $I = \int_{-\pi}^{\pi}(x - p(x))^2\,\mathrm{d}x$ integrál értéke a lehető legkisebb legyen, ahol $p(x) = a_0 + a_1\cos(x) + b_1\sin(x)$. Mi lesz ekkor I értéke?

   Segítség: Parseval-formula: $\int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$.

   Megoldás: Legyen $f(x)$ as a 2π-periodikus függvény, amire $f(x) = x$, ha $-\pi < x \le \pi$. Ekkor az I átlagos hibanégyzet akkor minimális, ha a_0, a_1, b_1 az f Fourier-együtthatói. Mivel $f(x)$ páratlan függvény, így a Fourier-sor tiszta szinuszos, így $a_0 = a_1 = 0$. Parciálisan integrálva:

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x = [\dots] = 2.$$

   Ekkor

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\pi a_0^2 - \pi\cdot(a_1^2 + b_1^2) = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x - \pi\cdot 2^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} - 4\pi = \frac{2}{3}\pi^3 - 4\pi \approx 8.1$$

4. (a) (1+2 pont) Mondja ki és bizonyítsa azt a tételt, ami $\det\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)$ értékét fejezi ki $\det\left(\underline{\underline{A}}\right)$ segítségével. Azt is nevezze meg, hogy bizonyítás közben a determináns milyen tulajdonságait használta!

   (b) (3 pont) Számítsa ki az $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix inverz-mátrixát!

   Megoldás:

   (a) $\det\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right) = 1/\det\left(\underline{\underline{A}}\right)$. Bizonyítás:

$$\det\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = \det\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}\right) = \det(I_n) = 1,$$

   ahol az első egyenlőségnél a determinánsok szorzástételét hasznátuk, a másodiknál az inverzmátrix definícióját, a harmadiknál pedig azt, hogy az identitásmátrix determinánsa egy.

   (b) Többféleképp is kiszámolható (pl. Gauss-Jordan eliminációval vagy adjungált-mátrixszal):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ -3/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

5. (a) (3 pont) Legyenek B és B' bázisok a V vektortérben. Legyen $T : V \to V$ egy lineáris transzformáció. Definiálja a következő fogalmakat: (i) a $\underline{v} \in V$ vektor B bázisbeli $(\underline{v})_B$ koordináta-vektora; (ii) a B-ből B'-be menő $\underline{\underline{P}}_{B,B'}$ báziscsere-mátrix; (iii) a T transzformáció $\underline{\underline{T}}_B$ mátrixa a B bázisban. Milyen összefüggés ál fenn $\underline{\underline{P}}_{B,B'}$ és $\underline{\underline{P}}_{B',B}$ közt? Hogyan fejezhető ki a $\underline{\underline{T}}_{B'}$ mátrix a $\underline{\underline{T}}_B$ és a báziscsere-mátrixok segítségével?

   (b) (4 pont) Legyen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a $2y + z = 0$ síkra való tükrözés. Határozza meg a T lineáris leképezés $\underline{\underline{A}}$ mátrixát az $\mathbb{R}^3$ vektortér standard bázisban.

   Megoldás:

   (a) (i) Ha $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$, akkor $(\underline{v})_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, ahol $\underline{v} = \alpha_1\underline{b}_1 + \dots + \alpha_n\underline{b}_n$

   (ii) $\underline{\underline{P}}_{B,B'}$ az a mátrix, amire $(\underline{v})_{B'} = \underline{\underline{P}}_{B,B'}(\underline{v})_B$ teljesül

   (iii) $\underline{\underline{T}}_B$ az a mátrix, amire $(T(\underline{v}))_B = \underline{\underline{T}}_B(\underline{v})_B$ teljesül

   Összefüggések: $\underline{\underline{P}}_{B',B} = \underline{\underline{P}}_{B,B'}^{-1}$ és $\underline{\underline{T}}_{B'} = \underline{\underline{P}}_{B,B'}\underline{\underline{T}}_B\underline{\underline{P}}_{B',B}$

(b) A sík normálvektora: $\underline{n} = (0,2,1)$. Ekkor az $\underline{v} = (x,y,z)$ vektor tükörképe:

$$T(\underline{v}) = \underline{v} - 2\frac{\langle \underline{v}, \underline{n}\rangle}{\langle \underline{n}, \underline{n}\rangle}\underline{n} = (x,y,z) - 2\frac{2y+z}{5}(0,2,1) = (x,y,z) - \frac{2}{5}(0, 4y+2z, 2y+z) =$$

$$(x, y - \frac{8y+4z}{5}, z - \frac{4y+2z}{5}) = (x, -\frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z, -\frac{4}{5}y + \frac{3}{5}z).$$

Tehát:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z \\ -\frac{4}{5}y + \frac{3}{5}z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Tehát:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

6. Legyen $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$ és $P_0(2,-1)$.

(a) (3 pont) Határozza meg az f függvény iránymenti deriváltját a P_0 pontban, a $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ irányban!

(b) (3 pont) Írja fel az f érintősíkjának egyenletét a P_0 pontban.

Megoldás:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y) = \frac{y\cdot(x+y) - xy\cdot 1}{(x+y)^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y) = \frac{x\cdot(x+y) - xy\cdot 1}{(x+y)^2}$$

$$f'_x(2,-1) = \frac{(-1)\cdot(2-1) - 2\cdot(-1)}{(2-1)^2} = 1, \qquad f'_y(2,-1) = \frac{2\cdot(2-1) - 2\cdot(-1)}{(2-1)^2} = 4$$

(a) $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ hossza: $\sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$, tehát a $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ irányú egységvektor: $\underline{v} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$. Így a keresett iránymenti derivált:

$$f'_{\underline{v}} = \frac{4}{5}f'_x(2,-1) - \frac{3}{5}f'_y(2,-1) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}4 = -\frac{8}{5}$$

(b) $f(2,-1) = \frac{2\cdot(-1)}{2-1} = -2$. Érintősík egyenlete: $z - f(2,-1) = f'_x(2,-1)(x-2) + f'_y(2,-1)(y-(-1))$. Azaz $z - (-2) = 1\cdot(x-2) + 4\cdot(y+1)$, azaz $z = x + 4y$.

7. (7 pont) Határozza meg az $f(x,y) = 6y^2 - 2y^3 + 3x^2 + 6xy$ függvény összes lokális minimumát, maximumát és nyeregpontját!

Megoldás:

$$f'_x = 6x + 6y, \qquad f'_y = 12y - 6y^2 + 6x$$

Kritikus pont: $f'_x(x,y) = 0$, $f'_y(x,y) = 0$, tehát, 6-al osztva:

$$x = -y, \qquad 2y - y^2 + x = 0$$

Behelyettesítve: $2y - y^2 - y = 0$, azaz $y = y^2$, azaz $y = 0$ vagy $y = 1$. Tehát a két kritikus pont van: $(0,0)$ és $(-1,1)$. A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx} = 6, \qquad f''_{yy} = 12 - 12y, \qquad f''_{xy} = 6$$

$$f''_{xx}(0,0) = 6, \qquad f''_{yy}(0,0) = 12, \qquad f''_{xy}(0,0) = 6$$

$$f''_{xx}(-1,1) = 6, \qquad f''_{yy}(-1,1) = 0, \qquad f''_{xy}(-1,1) = 6$$

$$f''_{xx}(0,0)f''_{yy}(0,0) - (f''_{xy}(0,0))^2 = 6\cdot 12 - 6^2 > 0$$

$$f''_{xx}(-1,1)f''_{yy}(-1,1) - (f''_{xy}(-1,1))^2 = 6\cdot 0 - 6^2 < 0$$

Tehát $(0,0)$ lokális minimum, $(-1,1)$ nyeregpont.

8. (7 pont) Legyen $D = \{(x, y) \; : \; 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \; 0 \le y \le x \; \}$. Határozza meg az $f(x, y) = xy$ függvény által generált felület felszínét a D tartomány felett!

Megoldás: Felszín:

$$A = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \sqrt{1 + y^2 + x^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Polárkoordinátás helyettesítéssel:

$$A = \int_{r=1}^{2} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \sqrt{1 + r^2} r \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \frac{\pi}{4} \int_{r=1}^{2} \sqrt{1 + r^2} r \, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{3} (1 + r^2)^{3/2} \right]_1^2 = \frac{\pi}{12} \left(5^{3/2} - 2^{3/2} \right)$$

9. (7 pont) Legyen $D = \{(x, y, z) \; : \; x^2 + y^2 + z^2 \le 9, \; x, y, z \ge 0\}$. Számolja ki a $f(x, y, z) = z$ függvény hármasintegrálját a D tartományon gömbkoordinátás helyettesítés segítségével!

Megoldás:

$$x = r \sin(\alpha) \cos(\beta), \qquad y = r \sin(\alpha) \sin(\beta), \qquad z = r \cos(\alpha),$$

Jacobi-determináns: $r^2 \sin(\alpha)$. Tehát:

$$\iiint_D z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\alpha=0}^{\pi/2} \int_{\beta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{3} r \cos(\alpha) r^2 \sin(\alpha) \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\alpha =$$

$$\int_{\alpha=0}^{\pi/2} \int_{\beta=0}^{\pi/2} \left[\cos(\alpha) \sin(\alpha) \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{3} \mathrm{d}\beta\mathrm{d}\alpha = \frac{81}{4} \int_{\alpha=0}^{\pi/2} \int_{\beta=0}^{\pi/2} \cos(\alpha) \sin(\alpha) \, \mathrm{d}\beta\mathrm{d}\alpha =$$

$$\frac{81\pi}{8} \int_{\alpha=0}^{\pi/2} \cos(\alpha) \sin(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha = \frac{81\pi}{8} \left[\frac{\sin^2(\alpha)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{81\pi}{16}$$