| ZH összpont | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Vizsga | Zh+vizsga | Jegy |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | |

Név: Neptun kód:

# Építőmérnöki Matematika A2 vizsga, 2016. Január 12.

Munkaidő: 100 perc

1. (3+4 pont) Döntse el a következő sorozatokról, hogy konvergensek-e vagy pedig divergensek:

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{4^n+n^2}, \qquad (b)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln(k)}$$

Azt is részletesen írja le, hogy melyik kritériumot használta és hogyan!

2. (3+2+2 pont) A hányados-kritérium segítségével döntse el, hogy mi a $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}(x+1)^k$ hatványsor konvergencia-sugara. Milyen $f(x)$ függvényt állít elő ez a hatványsor? Írja fel az $f'(x)$ derivált függvény $a=-1$ alappont körüli Taylor-sorának első négy nemnulla tagját.

3. (4 + 2 pont) Határozza meg az $a_0, a_1, b_1$ számokat oly módon, hogy az $I=\int_{-\pi}^{\pi}(x-p(x))^2\,\mathrm{d}x$ integrál értéke a lehető legkisebb legyen, ahol $p(x)=a_0+a_1\cos(x)+b_1\sin(x)$. Mi lesz ekkor $I$ értéke?

   *Segítség:* Parseval-formula: $\int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi a_0^2+\pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$.

4. (a) (1+2 pont) Mondja ki és bizonyítsa azt a tételt, ami $\det\left(\underline{\underline{A}}^{-1}\right)$ értékét fejezi ki $\det\left(\underline{\underline{A}}\right)$ segítségével. Azt is nevezze meg, hogy bizonyítás közben a determináns milyen tulajdonságait használta!

   (b) (3 pont) Számítsa ki az $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix inverz-mátrixát!

5. (a) (3 pont) Legyenek $B$ és $B'$ bázisok a $V$ vektortérben. Legyen $T: V\to V$ egy lineáris transzformáció. Definiálja a következő fogalmakat: (i) a $\underline{v}\in V$ vektor $B$ bázisbeli $(\underline{v})_B$ koordináta-vektora; (ii) a $B$-ből $B'$-be menő $\underline{\underline{P}}_{B,B'}$ báziscsere-mátrix; (iii) a $T$ transzformáció $\underline{\underline{T}}_B$ mátrixa a $B$ bázisban. Milyen összefüggés ál fenn $\underline{\underline{P}}_{B,B'}$ és $\underline{\underline{P}}_{B',B}$ közt? Hogyan fejezhető ki a $\underline{\underline{T}}_{B'}$ mátrix a $\underline{\underline{T}}_B$ és a báziscsere-mátrixok segítségével?

   (b) (4 pont) Legyen $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ a $2y+z=0$ síkra való tükrözés. Határozza meg a $T$ lineáris leképezés $\underline{\underline{A}}$ mátrixát az $\mathbb{R}^3$ vektortér standard bázisban.

6. Legyen $f(x,y)=\frac{xy}{x+y}$ és $P_0(2,-1)$.

   (a) (3 pont) Határozza meg az $f$ függvény iránymenti deriváltját a $P_0$ pontban, a $4\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ irányban!

   (b) (3 pont) Írja fel az $f$ érintősíkjának egyenletét a $P_0$ pontban.

7. (7 pont) Határozza meg az $f(x,y)=6y^2-2y^3+3x^2+6xy$ függvény összes lokális minimumát, maximumát és nyeregpontját!

8. (7 pont) Legyen $D=\{(x,y)\ :\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le y\le x\ \}$. Határozza meg az $f(x,y)=xy$ függvény által generált felület felszínét a $D$ tartomány felett!

9. (7 pont) Legyen $D=\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2\le 9,\ x,y,z\ge 0\}$. Számolja ki a $f(x,y,z)=z$ függvény hármasintegrálját a $D$ tartományon gömbkoordinátás helyettesítés segítségével!