ZH összpont	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Vizsga	Zh+vizsga	Jegy

Név: Neptun kód:

Építőmérnöki Matematika A2 vizsga, 2015. December 21.

Munkaidő: 100 perc

1. (a) (2 pont) Mondja ki a sorokra vonatkozó összehasonlító (majoráns, minoráns) kritériumokat !
   (b) (4 pont) Döntse el ezen kritériumok felhasználásával, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}+n}$ sor konvergens-e.
2. (2+2+3 pont) Határozza meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n (x+4)^n$ hatványsor konvergencia-sugarát, konvergencia-intervallumát, valamint azt az $f(x)$ függvényt, amit a hatványsor előállít!
3. (3+3 pont) Határozza meg $f(x) = \sin^2(x) + \sin^3(x)$ függvény Fourier-sorát, továbbá számítsa ki az $I = \int_0^{2\pi} (f(x) - p(x))^2 \,\mathrm{d}x$ integrált, ahol $p(x)$ az az elsőfokú trigonometrikus polinom, amire I értéke a lehető legkisebb.

   Segítség: Parseval-formula: $\int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$.
4. (a) (3 pont) Definiálja az $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in V$ vektorok által feszített $\mathrm{lin}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$ altér fogalmát. Milyen feltételnek kell teljesülnie a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ vektorokra, hogy a $\mathrm{lin}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$ tér egy bázisát alkossák?
   (b) (4 pont) Határozza meg a $V = \{(x, y, z) \ : \ x + 2y + 3z = 0\}$ vektortér egy bázisát!
5. Legyen B az $\mathbb{R}^2$ vektortér standard $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ bázisa. Legyen $B' = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$, ahol $\underline{b}_1 = \underline{e}_1$ és $\underline{b}_2 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$. Legyen T az origó körüli órajárás irányú 90 fokos forgatás.
   (a) (1 pont) Határozza meg a B'-ből B-be menő $\underline{\underline{P}}_{B',B}$ bázisátmenet-mátrixot.
   (b) (2 pont) Határozza meg a B-ből B'-be menő $\underline{\underline{P}}_{B,B'}$ bázisátmenet-mátrixot.
   (c) (1 pont) Határozza meg a T transzformáció $\underline{\underline{T}}_B$ mátrixát a B bázisban.
   (d) (3 pont) Határozza meg a T transzformáció $\underline{\underline{T}}_{B'}$ mátrixát a B' bázisban.
6. Legyen $f(x, y) = ye^{x-2y}$ és $P_0(1, -1)$.
   (a) (3 pont) Határozza meg az f függvény iránymenti deriváltját a P_0 pontban, a $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ irányban!
   (b) (3 pont) Adja meg azokat az egységnyi hosszú irányvektorokat, amelyek irányában az f függvény az adott P_0 pontban a leggyorsabban növekszik, illetve csökken!
7. (a) (4 pont) Határozza meg az $f(x, y) = x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x + 5$ függvény lokális szélsőértékhelyeit és nyeregpontjait, valamint számítsa ki a lokális szélsőérték-helyek jellegét (minimum/maximum).
   (b) (3 pont) Határozza meg az f minimumának értékét az $2x - y + 2 = 0$ peremfeltétel mellett!
8. (7 pont) Számítsa ki az $y = x$, $y = 2x$, $xy = 1$ és $xy = 3$ görbék által határolt tartomány területét!
9. (7 pont) Számítsa ki a $D = \{\, (x, y, z) \ : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \ -1 \le z \le 1, \ 0 \le x \le y \,\}$ test tömegét, ha a sűrűségfüggvény

$$f(x, y, z) = \frac{z^2}{(x^2 + y^2)^2}$$