Építő Mat A1 2. ZH megoldások, 2016. 04. 08 Mogy

$\boxed{C}$ csoport 2/1

① a.) $f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ha ez értelmes és a határérték létezik.

b.) Ha $x_0 \in \mathbb{R}$ vagy esetleg $x_0 = \pm\infty$, és az f, g függvények az x_0 egy környezetében* értelmezve vannak és differenciálhatóak, továbbá $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ vagy $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$, és $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik,

akkor $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik, és $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

*: kivéve esetleg x_0-ban. Egyoldali környezet is jó.

Pl: 1.) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$, $x_0 = 0$ esetén $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$,

így $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

2.) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$ esetén $\lim_{x\searrow x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\searrow x_0} g(x) = \infty$,

így $\lim_{x\searrow x_0} x \ln x = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln x}{1/x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\searrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\searrow 0} (-x) = 0$.

② a) $\left(\frac{\operatorname{sh}(2^x)}{\operatorname{arth}(x^2)}\right)' = \frac{\operatorname{ch}(2^x)\cdot 2^x \cdot \ln 2 \cdot \operatorname{arth}(x^2) - \operatorname{sh}(2^x)\frac{1}{1-(x^2)^2}2x}{\operatorname{arth}^2(x^2)}$

b.) $\left(x^{1/x}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)' = \underbrace{e^{\frac{1}{x}\ln x}}_{x^{1/x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\ln x\right)' = x^{\frac{1}{x}} \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{x} x^{\frac{1}{x}-1} \cdot 1 + x^{\frac{1}{x}} \ln x \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)$

$= x^{\frac{1}{x}-2} \cdot (1 - \ln(x))$

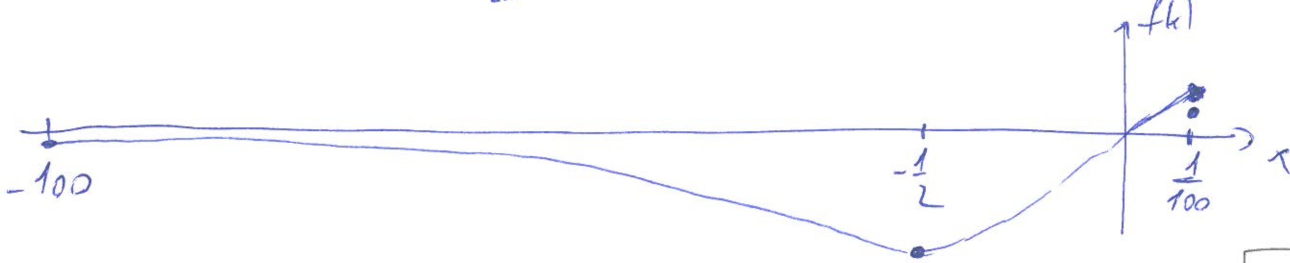
C csoport

(3) f mindenütt értelmezve van $\left[-100; \frac{1}{100}\right]$-on, tehát szélsőértéke csak a végpontokban $\left(-100; \text{ ill. } \frac{1}{100}\right)$ lehet, és ott, ahol $f'(x)=0$. Ehhez $f'(x)=\left(\frac{x}{4x^2+1}\right)' = \frac{1\cdot(4x^2+1)-x\cdot 8x}{(4x^2+1)^2} = \frac{1-4x^2}{(4x^2+1)^2}$,

vagyis $0=f'(x) \Longleftrightarrow 0=1-4x^2$, vagyis $x^2=\frac{1}{4}$ $\boxed{x=\pm\frac{1}{2}}$

Függvényértékek:

- $x=-100$-ban $f(x)=\frac{-100}{4\cdot 10000+1} \approx -0.0025$
- $x=-\frac{1}{2}$-ben $f(x)=\frac{-0.5}{4\cdot\frac{1}{4}+1} = -0.25$ ← abs sz. minimum
- $x=\frac{1}{100}$-ban $f(x)=\frac{0.01}{4\cdot 0.01^2+1} \approx 0.01$ ← abs sz. maximum
- $x=+\frac{1}{2}$ kívül esik az értelmezési tartományon.



(4) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 2}}{2}$$

$f'(x)=x^2+3x+2$ $\qquad f'(x)=0 \Longleftrightarrow x=-1 \lor x=-2$

$f''(x)=2x+3$ $\qquad f''(x)=0 \Longleftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

a.) $x\le -2$-re $f'(x)\ge 0$, f növekvő

$-2\le x\le -1$-re $f'(x)\le 0$, f csökkenő

$-1\le x$-re $f'(x)\ge 0$, f növekvő

b.) $x<-\frac{3}{2}$-re $f''(x)<0$, f konkáv

$x>-\frac{3}{2}$-re $f''(x)>0$, f konvex

Megj.: