B csoport

1. (3+2 pont) Írja le lépésről lépésre az órán tanult módszert a folytonos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény globális szélsőértékeinek meghatározására! Mutassa meg lépéről lépésre, hogy hogyan találja meg ez a módszer az $f(x) = |x|$ függvény globális szélsőértékeit a $[-1, 2]$ intervallumon!

   Megoldás. Először meghatározzuk a kritikus pontokat:

   - az intervallum szélei (a és b),
   - azon pontok $[a, b]$-ből, ahol f nem deriválható,
   - azon pontok $[a, b]$-ből, ahol f deriváltja 0.

   Ha ezekből a pontokból véges sok van, akkor egyesével behelyettesítjük őket f-be, majd a kapott értékek közül a legnagyobb a globális maximum $[a, b]$-n, a legkisebb pedig a globális minimum.

   Az $f(x) = |x|$ függvény nem deriválható a 0-ban, egyébként $f'(x) = -1$, ha $x < 0$ és $f'(x) = 1$, ha $x > 0$. A kritikus pontok tehát $-1, 0, 2$ (-1 és 2 az intervallum szélei). Behelyettesítve azt kapjuk, hogy 0-ban van a globális minimum $[-1, 2]$-n, 2-ben pedig a globális maximum.

2. (5 pont) Írja fel az $y = \sqrt{2x + 5}$ görbe azon érintőegyenesének az egyenletét, ami párhuzamos a $2y - x + 1 = 0$ egyenessel!

   Megoldás. Az egyenes egyenletét $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ alakra rendezve látszik, hogy a meredeksége $m = 1/2$. Az $f(x) = \sqrt{2x + 5}$ görbe érintője akkor lesz párhuzamos ezzel, ha $f'(x) = m$. Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x + 5}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x + 5}},$$

   így rendezve

$$\frac{1}{\sqrt{2x + 5}} = \frac{1}{2} \qquad 2x + 5 = 4 \qquad x = -1/2.$$

   Az $x_0 = -1/2$ pontban az érintő egyenlete:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{1}{2}(x + 1/2) + \sqrt{2 \cdot (-1/2) + 5} = \frac{x}{2} + \frac{9}{4}.$$

3. (5 pont) Határozza meg az A paraméter értékét oly módon, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 - 3 & \text{ha } x \leq 2 \\ \frac{(x-2)^2}{\ln(x) - \ln(2) + 1 - \frac{1}{2}x} & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

   függvény folytonos legyen!

   Megoldás. A 2 pont kivételével f mindenhol automatikusan folytonos. Ahhoz, hogy a 2-ben folytonos legyen, az kell, hogy

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)^2}{\ln(x) - \ln(2) + 1 - \frac{1}{2}x} = A \cdot 2^2 - 3$$

   teljesüljön. A baloldali limesz $\frac{0}{0}$ típusú, így a L'Hospital szabályt alkalmazva

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)^2}{\ln(x) - \ln(2) + 1 - \frac{1}{2}x} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x - 2)}{1/x - 1/2},$$

ami ismét $\frac{0}{0}$ típusú, így még egyszer alkalmazzuk a L'Hopsital szabályt:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{1/x - 1/2} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{-1/x^2} = -8.$$

Végül a

$$4A - 3 = -8$$

egyenletet megoldva $A = -5/4$.

4. (4+1 pont) Határozza meg az $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ függvény lokális szélsőértékeit és a szélsőértékek jellegét (lokális max/min)! Megoldását rajzzal is szemléltesse!

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$$

$f'(x) = 0$ megoldásából $x = \pm 1$ adódik, ezeket behelyettesítve $f''(-1) > 0$, így a -1 lokális minimum, míg $f''(1) > 0$, így az 1 lokális maximum. Ábra: