A csoport

1. (a) (2 pont) Mondja ki a az $f(x)$ függvény x_0 pontban vett $f'(x_0)$ deriváltjának definícióját (a különbségi hányados határértéke)!

   Megoldás.
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$
   amennyiben a limesz létezik.

   (b) (3 pont) Mondja ki a L'Hospital-szabályt, és mutasson egy-egy példát arra, hogy hogyan használható $\frac{\infty}{\infty}$ és $\frac{0}{0}$ típusú limeszek kiszámítására.

   Megoldás. Amennyiben $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, vagy $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, továbbá f és g deriválhatóak, akkor
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$
   feltéve, hogy a jobboldali limesz létezik. (x_0 lehet ∞ vagy $-\infty$ is.)

   Például
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0.$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1.$$

2. (3+2 pont) Számítsa ki a következő függvények deriváltját:
$$(a)\ \arcsin(x^2)\sqrt[5]{7x+3} \qquad\qquad (b)\ x^{\sqrt{x}}$$

   Megoldás.
$$\left(\arcsin(x^2)\sqrt[5]{7x+3}\right)' = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot \sqrt[5]{7x+3} + \arcsin(x^2)\cdot\frac{1}{5}\cdot(7x+3)^{-4/5}\cdot 7.$$
$$\left(x^{\sqrt{x}}\right)' = \left(e^{\sqrt{x}\cdot\ln x}\right)' = e^{\sqrt{x}\cdot\ln x}\cdot\left(\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x\right)$$

3. (4+1 pont) Határozza meg az $f(x) = xe^{-\frac{1}{4}x^2}$ függvény globális maximumát és globális minimumát a $[-\frac{1}{100}, 100]$ intervallumon! Megoldását a függvénygrafikon és a szélsőértékhelyek lerajzolásával is szemléltesse.

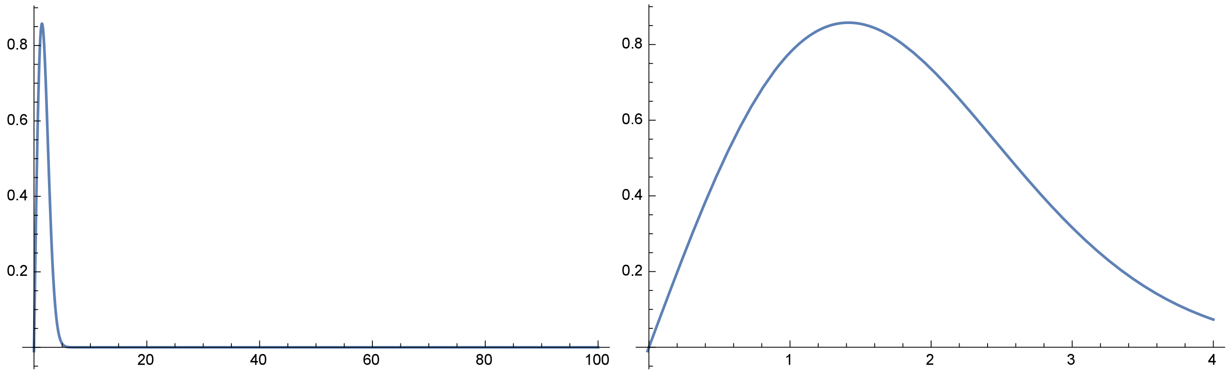
   Megoldás.
$$f'(x) = \left(1-\frac{x^2}{2}\right)e^{-\frac{1}{4}x^2};$$
   a kritikus pontok:

   - az intervallum szélei: $-\frac{1}{100}$ és 100;
   - ahol $f'(x) = 0$, azaz $x = \pm\sqrt{2}$, de ezek közül csak $x = \sqrt{2}$ van az intervallumban;
   - ahol f nem deriválható - ilyen pont nincs.

A helyettesítési értékek:

$$f(-1/100) \approx -0.01, \qquad f(\sqrt{2}) \approx 0.86, \qquad f(100) \approx 1.84 \cdot 10^{-1084},$$

így a globális maximum $\sqrt{2}$-ben van, a globális minimum $-1/100$-ban. Ábra (az elejére külön is ránagyítva):



4. (5 pont) Határozza meg, hogy milyen intervallumokon konvex illetve konkáv az

$$f(x) = (\ln(x))^2 x$$

függvény.

Megoldás. A függvény csak $x > 0$-ra van értelmezve.

$$f'(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x), \qquad f''(x) = \frac{2\ln(x) + 2}{x}.$$

A második derivált 0, ha $2\ln(x) + 2 = 0$, azaz $x = 1/e$.

- $x < 1/e$ esetén $f''(x) < 0$, így a függvény itt konkáv
- $x > 1/e$ esetén $f''(x) > 0$, így a függvény itt konvex
- $x = 1/e$ esetén inflexiós pontja van.