D csoport

1. *(1+2+2 pont)* Legyen $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Írja fel $1/z$ és z^5 trigonometrikus alakját, valamint mind az öt olyan komplex szám trigonometrikus alakját, ami kielégíti $\sqrt[5]{z}$ definícióját!

   Megoldás.

$$1/z = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)), \qquad z^5 = r^5(\cos(5\varphi) + i\sin(5\varphi)),$$

   az ötödik gyökök értékei pedig

$$\sqrt[5]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

2. Legyen $z_1 = 3 - 3i$ és $z_2 = 2i - 2\sqrt{3}$.

   (a) *(2 pont)* Adja meg a $z = z_1/z_2$ algebrai alakját!

   (b) *(3 pont)* Adja meg z_1, z_2, valamint $z = z_1/z_2$ trigonometrikus alakját!

   Megoldás.

$$z_1/z_2 = \frac{3-3i}{2i-2\sqrt{3}} = \frac{(3-3i)(2i+2\sqrt{3})}{(2i-2\sqrt{3})(2i+2\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{3}+6+(6\sqrt{3}-6)i}{16} = \frac{6\sqrt{3}+6}{16} + \frac{6\sqrt{3}-6}{16} \cdot i$$

$$z_1 = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_2 = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$z_1/z_2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right).$$

3. *(5 pont)* Számolja ki az $x = -1 + 2t$, $y = -t$, $z = 1 + t$ és az $x = 1 + t$, $y = -1 + t$, $z = -t$ egyenesek távolságát.

   Megoldás. Az egyenesek irányvektorai $(2, -1, 1)$ illetve $(1, 1, -1)$ (az egyenesek kitérőek). Egy olyan vektort, ami mindkettőre merőleges, megkaphatunk ezek vektoriális szorzataként: $\underline{n} = (2, -1, 1) \times (1, 1, -1) = (0, -3, -3)$.

   Az egyenesek egy-egy pontja $(-1, 0, 1)$ és $(1, -1, 0)$, a köztük mutató vektor $(2, -1, -1)$. Ennek a vektornak a fenti $\underline{n}$ vektorra vett vetületének hossza a két egyenes távolsága. Ehhez normáljuk le $\underline{n}$-et: $\underline{n}_0 = \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, végül a kérdéses távolság

$$\underline{n}_0 \cdot (2, -1, -1) = \sqrt{2}.$$

4. *(5 pont)* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-5}{-1+2n}\right)^{3n+1} =?$

   Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-5}{-1+2n}\right)^{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4}{2n-5}\right)^{3n+1};$$

   a Jolly joker tétel alkalmazható, abban $\lim_{n\to\infty} \frac{4}{2n-5} \cdot (3n+1) = \frac{12}{2} = 6$, így az eredeti határérték

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{5+2n}\right)^{-3n+1} = e^6.$$