**C csoport**

1. *(1+2+2 pont)* Legyen $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$. Írja fel $z_1 z_2$, $z_1/z_2$ és $1/z_1$ algebrai alakját.

   Megoldás.

   $$z_1 z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)i, \quad z_1/z_2 = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot i, \quad 1/z_1 = \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} - \frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2} \cdot i.$$

2. *(5 pont)* Írja fel mind a hat komplex számot (algebrai és trigonometrikus alakban is), ami kielégíti $\sqrt[6]{64}$ definícióját.

   Megoldás. $z = 64(\cos(0) + i\sin(0))$, így

   $$\begin{aligned}
   z_1 &= 2\left(\cos\left(0\right) + \sin\left(0\right)\right) = 2 \\
   z_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right) = 1 + \sqrt{3}i \\
   z_3 &= 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)\right) = -1 + \sqrt{3}i \\
   z_4 &= 2\left(\cos\left(\frac{6\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{6}\right)\right) = -2 \\
   z_5 &= 2\left(\cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{6}\right)\right) = -1 - \sqrt{3}i \\
   z_6 &= 2\left(\cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{6}\right)\right) = 1 - \sqrt{3}i
   \end{aligned}$$

3. *(5 pont)* Számolja ki az $x = -1 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = -t$ és az $x = 1 + t$, $y = -t$, $z = -1 + t$ egyenesek távolságát.

   Megoldás. Az egyenesek irányvektorai $(2, 1, -1)$ illetve $(1, -1, 1)$ (az egyenesek kitérőek). Egy olyan vektort, ami mindkettőre merőleges, megkaphatunk ezek vektoriális szorzataként: $\underline{n} = (2, 1, -1) \times (1, -1, 1) = (0, -3, -3)$.

   Az egyenesek egy-egy pontja $(-1, 1, 0)$ és $(1, 0, -1)$, a köztük mutató vektor $(2, -1, -1)$. Ennek a vektornak a fenti $\underline{n}$ vektorra vett vetületének hossza a két egyenes távolsága. Ehhez normáljuk le $\underline{n}$-et: $\underline{n}_0 = \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, végül a kérdéses távolság

   $$\underline{n}_0 \cdot (2, -1, -1) = \sqrt{2}.$$

4. *(5 pont)* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{5+2n}\right)^{-3n+1} = ?$

   Megoldás.

   $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{5+2n}\right)^{-3n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4}{5+2n}\right)^{-3n+1};$$

   a Jolly joker tétel alkalmazható, abban $\lim_{n\to\infty} \frac{-4}{5+2n} \cdot (-3n+1) = \frac{12}{2} = 6$, így az eredeti határérték

   $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{5+2n}\right)^{-3n+1} = e^6.$$