Építőmérnöki Matematika A1 vizsga megoldások, 2016. Június 28.

1. Legyen e_1 egyenes egyenlete $\frac{x-7}{10} = \frac{y-10}{6} = \frac{-z-5}{8}$ és e_2 egyenes egyenlete $\frac{x+3}{2} = \frac{y-15}{4} = \frac{z-5}{3}$.
   (a) (1 pont) Adja meg az e_1 egyenes egy P_1 pontját és az e_2 egyenes egy P_2 pontját!
   (b) (1 pont) Adja meg az e_1 egyenes $\underline{v}_1$ irányvektorát és az e_2 egyenes $\underline{v}_2$ irányvektorát!
   (c) (3 pont) Számolja ki az $\underline{n} = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ vektoriális szorzatot.
   (d) (5 pont) Számolja ki az e_1 és az e_2 egyenesek távolságát.

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet 18-19. oldal.

2. (a) (1 pont) Definiálja, hogy mikor *kölcsönösen egyértelmű* egy f függvény.
   (b) (2 pont) Definiálja, hogy mi az f függvény f^{-1} *inverz-függvénye*!
   (c) (3 pont) Legyen $f(x) = \sqrt{3x+2} - 5$. Határozza meg f értelmezési tartományát, értékkészletét. Vázolja fel f grafikonját.
   (d) (4 pont) Határozza meg a (b) pontbeli f függvény f^{-1} inverz-függvényét! Adja meg f^{-1} értelmezési tartományát, értékkészletét. Vázolja fel f^{-1} grafikonját.

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet (a) 36. oldal (b) 37. oldal (c) 38-39. oldal (d) 38-39. oldal

3. (3+3+4 pont) Deriválja ezeket a függvényeket: (a) $f(x) = \frac{3^x+5^x}{7^x}$, (b) $g(x) = \ln(\cos(1/x))$, (c) $h(x) = x^x$

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet
   (a) 65. oldal,
   (b) $g'(x) = \frac{1}{\cos(1/x)}(-\sin(1/x))\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\tan(1/x)$,
   (c) 67. oldal: $h'(x) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$.

4. (a) (2 pont) Definiálja a *lokális szélsőérték* és az *inflexiós pont* fogalmát!
   (b) (8 pont) Legyen $f(x) = xe^{-x^2/8}$. Az f függvény mely intervallumokon konvex/konkáv? Vázolja fel f grafikonját f lokális szélsőértékeinek és inflexiós pontjainak megjelölésével!

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet
   (a) 79., 84. oldal,
   (b) 85. oldal. Lokális min: -2, lokális max: 2, inflexiós pontok: $-\sqrt{12}$, 0, $\sqrt{12}$

5. Tekintsük az $x(t) = 2(t - \sin(t))$, $y(t) = 2(1 - \cos(t))$ paraméteresen megadott görbét.
   (a) (3 pont) Nevezze meg és rajzolja le ezt a nevezetes görbét!
   (b) (7 pont) Adja meg egyenlettel és rajzolja is le a görbe érintő egyenesét a $t_0 = \frac{3\pi}{4}$ pontban!

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet
   (a) 49. oldal (ciklois),
   (b) 99. oldal: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, azaz $y - y(t_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \cdot (x - x(t_0))$, azaz

$$y - (2 + \sqrt{2}) = (\sqrt{2} - 1)(x - (\frac{3\pi}{2} - \sqrt{2}))$$

6. (3+3+4 pont) (a) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{4-2x}}\,dx =?$, (b) $\int \frac{2x^3+x}{x^4+x^2+1}dx =?$, (c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+10}}\,dx =?$ *Tipp:* (c) teljes négyzet!

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet
   (a) 119. oldal, $\int \frac{1}{\sqrt[3]{4-2x}}\,dx = -\frac{3}{4}(4-2x)^{2/3} + C$
   (b) 120. oldal, $\int \frac{2x^3+x}{x^4+x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^4 + x^2 + 1) + C$
   (c) 125. oldal.

7. (10 pont) $\int \frac{4x+2}{x^3+2x^2+x}\,\mathrm{d}x = ?$ *Tipp:* Nevező faktorizálása, majd parciális törtekre bontás...

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet 134. oldal. $\int \frac{4x+2}{x^3+2x^2+x}\,\mathrm{d}x = 2\ln(x) - 2\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C$

8. (10 pont) Egy 5 cm sugarú gömb alakú grapefruitból levágok egy 1 cm vastagságú szeletet. Mi a levágott szelet térfogata (köbcentiben) és mi a levágott héj felszíne (négyzetcentiben)? *Tipp:* használja a forgástestek térfogatát és felszínét adó integrál-formulákat. $f(x) = ?$, $a = ?$, $b = ?$ Rajzoljon ábrát!

   Megoldás: $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $a = 4$, $b = 5$.

   Térfogat: lásd szkennelt jegyzet 160-161. oldal: $V = \pi \int_4^5 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{14}{3}\pi$.

   Felszín: lásd szkennelt jegyzet 162. oldal $A = 2\pi \int_4^5 f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_4^5 5\,\mathrm{d}x = 10\pi$.

9. (10 pont) Döntse el az

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^5 + x}\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_1^\infty \frac{1}{x^5 + x}\,\mathrm{d}x, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x} + x^2}\,\mathrm{d}x, \quad I_4 = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[5]{x} + x^2}\,\mathrm{d}x$$

   improprius integrálokról, hogy konvergensek-e vagy pedig divergensek. Válaszát indokolja.

   Megoldás: lásd szkennelt jegyzet 173., 175., 176. oldal

   A limesz-összehasonlító kritériumot használva:

   I_1: $f(x) = \frac{1}{x^5+x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$, tehát I_1 divergens

   I_2: $f(x) = \frac{1}{x^5+x}$, $g(x) = \frac{1}{x^5}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, $\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, tehát I_2 konvergens

   I_3: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, tehát I_3 konvergens

   I_4: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, $\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, tehát I_4 konvergens