# Építőmérnöki Matematika A1 vizsga megoldásai, 2016. Június 21.

1. (a) (4 pont) Adott egy $z$ komplex szám trigonometrikus alakban. Legyen $n$ egy pozitív egész szám. Mondja meg, hogy hány olyan komplex szám van, ami kielégíti $\sqrt[n]{z}$ definícióját, és írja fel az összes ilyen komplex szám trigonometrikus alakját.

   **Megoldás:** Lásd szkennelt jegyzet 7 és 3/4-edik oldal.

   (b) (6 pont) Írja fel az összes olyan komplex számot algebrai és trigonometrikus alakban, amely kielégíti $\sqrt[3]{8i}$ definícóját. Szemléltesse rajzzal ezen számok elhelyezkedését a komplex számsíkon.

   **Megoldás:** (Lásd szkennelt jegyzet 7 és 1/2-edik oldal) Itt:

$$z_1 = 2\left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right) = \sqrt{3} + i$$
$$z_2 = 2\left(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})\right) = -\sqrt{3} + i$$
$$z_3 = 2\left(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})\right) = -i$$

2. (5+5 pont) $(a)$ $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+1} - \sqrt{n^2+6n-1}\right) =?$ $(b)$ $\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln(n)+n^2)(4n^{-1/2}-5n^{-1/3})}{2n^{3/5}+3n^{5/3}} =?$

   **Megoldás:**

   (a) (Lásd szkennelt jegyzet 32-33. oldal) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+1} - \sqrt{n^2+6n-1}\right) = -9/2$

   (b) (Lásd szkennelt jegyzet 32. oldal) $\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln(n)+n^2)(4n^{-1/2}-5n^{-1/3})}{2n^{3/5}+3n^{5/3}} = -5/3$

3. (10 pont) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, ami párhuzamos az $y - 2x + 5 = 0$ egyenessel és érinti az $f(x) = 2\ln(3x+6)$ függvény görbéjét!

   **Megoldás:** (Lásd szkennelt jegyzet 67-68. oldal) Itt: $x_0 = -1$ az érintési pont $x$-kordinátája, és így az érinő egyenes egyenlete: $y - 2\ln(3) = 2(x+1)$.

4. (a) (4 pont) Írja le lépésről lépésre az órán tanult módszert a folytonos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény globális szélsőértékeinek meghatározására!

   **Megoldás:**Lásd szkennelt jegyzet 80. oldal

   (b) (6 pont) Mutassa meg lépéről lépésre, hogy hogyan találja meg ez a módszer az $f(x) = \frac{4x}{1+4x^2}$ függvény globális szélsőértékeit a $[-3/2, 1/4]$ intervallumon!

   **Megoldás:** (Lásd szkennelt jegyzet 82. oldal)

   Itt: globális minimum: $f(-1/2) = -1$, globális maximum: $f(1/4) = 4/5$.

5. (10 pont) Írja fel az $f(x) = \cos^2(x)$ függvény $x_0 = \pi$ alappont körüli negyedrendű $T_4(x)$ Taylor-polinomját! *Segítség:* Érdemes egy trigonometrikus azonossággal kezdeni a megoldást!

   **Megoldás:** $T_4(x) = 1 - (x-\pi)^2 + \frac{1}{3}(x-\pi)^4$

6. (a) (3 pont) $\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x =?$ *Segítség:* Alakítsa teljes négyzetté a nevezőt.

   **Megoldás:** (Lásd szkennelt jegyzet 123. oldal) $\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \arctan(x-2) + C$

   (b) (3 pont) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x =?$ *Segítség:* Igaz-e, hogy a számláló a nevező deriváltja?

   **Megoldás:** (Lásd szkennelt jegyzet 123. oldal) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) + C$

(c) (2 pont) $\int \frac{4x-5}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x =?$ *Segítség:* Használja az (a) és (b) részfeladatok megoldásait.

**Megoldás:** (Lásd szkennelt jegyzet 123. oldal) $\int \frac{4x-5}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = 2\ln(x^2-4x+5)+3\arctan(x-2)+C$

(d) (2 pont) $\int \frac{x^2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x =?$ *Segítség:* A számláló és a nevező foka megegyezik.

**Megoldás:** (Lásd szken. jegyz. 136. old.) $\int \frac{x^2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = x+2\ln(x^2-4x+5)+3\arctan(x-2)+C$

7. (10 pont)

$$\int \frac{1}{e^{x/2}+e^x}\,\mathrm{d}x =?$$

*Segítség:* Először alkalmazza az $u = e^{x/2}$ helyettesítést, majd parciális törtekre bontást ...

**Megoldás:** (Lásd szken. jegyz. 137. old.) $\int \frac{1}{e^{x/2}+e^x}\,\mathrm{d}x = -2e^{-x/2} - x + 2\ln(e^{x/2}+1) + C$

8. (10 pont) A kardioid az a síkidom, amit polárkoordinátarendszerben az $r(\varphi) = 1 + \cos(\varphi)$ képlettel megadott görbe kerül meg, ahol $0 \le \varphi \le 2\pi$. Rajzoljon ábrát a kardioidról a tengelymetszetek pontos megjelölésével és számítsa ki a kardioid $x \le 0, y \ge 0$ síknegyedbe eső részének területét!

**Megoldás:** (Lásd szkennelt jegyzet 155. oldal) $T = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}(1+\cos(\varphi))^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3\pi}{8} - 1 \approx 0.178$

9. (a) (5 pont) Számítsa ki $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ értékét tetszőleges $\alpha > 0$ esetén!

(b) (5 pont) Számítsa ki $\int_0^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$ értékét tetszőleges $\alpha > 0$ esetén!

*Segítség:* Kezelje külön az $\alpha = 1$ esetet! Azt is mutassa meg, hogy $\alpha$ mely értékei esetén divergensek az (a) és (b) részfeladatok improprius integráljai!

**Megoldás:** Lásd szkennelt jegyzet 165., 166., 167. oldal.

(a) Ha $1 < \alpha$, akkor $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}$

Ha $0 < \alpha \le 1$, akkor $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \infty$

(b) Ha $0 < \alpha < 1$, akkor $\int_0^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}$

Ha $1 \le \alpha$, akkor $\int_0^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \infty$