

ZH összpont	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Vizsga	Zh+vizsga	Jegy

Név:

Neptun kód:

## Építőmérnöki Matematika A1 vizsga, 2015. Június 9.

Munkaidő: 100 perc, a 7-9 feladatokból el kell érni 30%-ot és összesen is el kell érni 30%-ot

- (a) (5 pont) Magyarázza el, hogy miért következik az  $\underline{a} \times \underline{b}$  vektoriális szorzat definíciójából, hogy az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  térvektorok által feszített paralelogramma területe  $|\underline{a} \times \underline{b}|$ . Rajzoljon szemléltető ábrát is.

(b) (5 pont) Magyarázza el, hogy miért következik a skaláris, a vektoriális és a vegyes szorzat definíciójából, hogy az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  térvektorok által feszített paralelepipedon térfogata az  $(\underline{a} \underline{b} \underline{c})$  vegyes szorzat abszolútértéke? Rajzoljon szemléltető ábrát is.
- (a) (4 pont) Definiálja az  $\arcsin(x)$  és  $\arccos(x)$  függvényeket. Mi az  $\arcsin(x)$  és  $\arccos(x)$  függvények értelmezési tartománya, értékkészlete? Rajzolja le a grafikonjukat.

(b) (2 pont)  $s_1 = \sin(-\frac{\pi}{3}) = ?$ ,  $c_1 = \cos(-\frac{\pi}{3}) = ?$ ,  $s_2 = \sin(\frac{3}{4}\pi) = ?$ ,  $c_2 = \cos(\frac{3}{4}\pi) = ?$

(c) (4 pont)  $\arcsin(s_1) = ?$ ,  $\arccos(c_1) = ?$ ,  $\arcsin(s_2) = ?$ ,  $\arccos(c_2) = ?$   
*Vigyázat:* Nem minden  $x \in \mathbb{R}$  számra igaz, hogy  $\arcsin(\sin(x)) = x$ ,  $\arccos(\cos(x)) = x$ .
- (a) (4 pont) Bizonyítsa be, hogy  $\tan'(x) = \tan^2(x) + 1$ . *Segítség:* Használja a  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  definíciót és a hányados-függvény differenciálási szabályát.

(b) (6 pont) Vezesse le az  $\arctan(x)$  függvény deriváltjának képletét a  $\tan(\arctan(x)) = x$  azonosság mindkét oldalának differenciálásával és az a) részfeladat felhasználásával.
- (10 pont) Az  $f(x) = x \cdot e^{-2x^2}$  függvény mely intervallumokon növekszik, csökken, konvex, konkáv? Rajzolja le az  $f(x)$  függvény grafikonját, a kritikus pontok és inflexiós pontok megjelölésével!
- (10 pont) Írja fel azoknak az egyeneseknek az egyenletét, amelyek átmennek a  $(0, 2)$  ponton és érintik az  $x^2 + 4y^2 = 4$  egyenletű ellipszist. Rajzoljon ábrát a feladatban előforduló síkidomokról!
- (4+3+3 pont) (a)  $\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx = ?$ , (b)  $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx = ?$ , (c)  $\int \frac{x-1}{x^2+4x+5} dx = ?$   
*Segítség:* (a): teljes négyzet, (b): helyettesítés:  $u = x^2 + 4x + 5$ , (c): (a) & (b)
- (10 pont)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx = ?$  *Segítség:*  $\cos(x)$  kitevője páratlan, így helyettesítsen  $u = \sin(x)$ -et!
- (3+3+4 pont) Mi annak a síkidomnak a területe és mik a súlypontjának koordinátái, amit felülről az  $y = \sin(\frac{1}{2}x)$  görbe  $x = 0$ -tól  $x = 2\pi$ -ig tartó része, alulról pedig az  $x$  tengely határol?
- (10 pont) Döntse el az

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^3 + x} dx, \quad I_2 = \int_1^\infty \frac{1}{x^3 + x} dx, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x} + x^2} dx, \quad I_4 = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x} + x^2} dx$$

improprius integrálokról, hogy konvergensek-e vagy pedig divergensek. Válaszát indokolja.