Építőmérnöki Matematika A1 vizsga megoldásai, 2017. Május 30.

1. Legyen $\underline{u} = (-1, 0, 3)$ és $\underline{v} = (1, 2, 1)$.

   (a) (5 pont) Számítsa ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által feszített háromszög területét!

   (b) (5 pont) Számítsa ki az $\underline{u}$ vektor merőleges vetületét a $\underline{v}$ vektor egyenesére!

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet 11.-12. oldal.

   (a) $\underline{u} \times \underline{v} = (-6, 4, -2)$. $T_\Delta = \frac{1}{2}|\underline{u} \times \underline{v}| = \sqrt{14}$.

   (b) A vetület-vektor: $\left(\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{\underline{v}\cdot\underline{v}}\right)\underline{v} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

2. (3+3+4 pont) Számítsa ki a következő határértékeket:

$$(a) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2n}{1+n}\right)^{\frac{1}{2}n}, \qquad (b) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{2n^2}\right)^{4n}, \qquad (c) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-4}{n+3}\right)^{5n-2}$$

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet 30. oldal, 33. oldal.

   (a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2n}{1+n}\right)^{\frac{1}{2}n} = +\infty$

   (b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{2n^2}\right)^{4n} = 1$

   (c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-4}{n+3}\right)^{5n-2} = e^{-35}$

3. (a) (2 pont) Mondja ki az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény x_0 pontban értelmezett baloldali és jobboldali határértékének definícióját!

   (b) (2 pont) Definiálja, hogy mikor folytonos az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény!

   (c) (2 pont) Definiálja az f függvény x_0 pontban értelmezett deriváltját a különbségi hányados függvény határértékeként!

   (d) (4 pont) Mutasson egy olyan folytonos f függvént, ami nem differenciálható! Magyarázza el, hogy melyik x_0 pontban és miért sérül a differenciálhatóság definíciója!

   Megoldás:

   (a) Szkennelt jegyzet 52. oldal.

   (b) 55.-56. oldal.

   (c) 58. oldal.

   (d) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, lásd 60. oldal.

4. (10 pont) Az ezer négyzetcentiméter felületű körhengerek közül melyiknek a legnagyobb a térfogata?

   Segítség: Az r sugarú és m magasságú körhenger felülete $A = 2r^2\pi + 2r\pi m$ és térfogata $V = r^2\pi m$.

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet 91. oldal. $V(r) = r \cdot (500 - r^2\pi)$ függvény maximumát keressük. $r = 7.28$, $m = 14.56$.

5. (8+2 pont) Mi az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola $P(-2, \sqrt{3})$ pontjában húzott érintő egyenesének egyenlete? Rajzolja le a hiperbolát, a P pontot és az érintő egyenest! *Segítség:* Használja az implicit módon megadott függvények differenciálásáról tanultakat!

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet 94-95. oldal. $y - \sqrt{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x+2)$.

6. (4+6 pont) (a) $\int \frac{1}{(4-2x)^2}\,\mathrm{d}x =?$, (b) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x =?$

   Megoldás:

   (a) $\int \frac{1}{(4-2x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{1}{4-2x} + C$

   (b) Lásd szkennelt jegyzet 123. oldal. $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \arctan(x+2) + C$.

7. (10 pont) $\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x =?$ *Segítség:* Használja az $x = \cosh(u)$ helyettesítést és a

$$\cosh^2(u) - 1 = \sinh^2(u), \qquad \sinh^2(u) = \frac{\cosh(2u)-1}{2}, \qquad \sinh(2u) = 2\sinh(u)\cosh(u)$$

   azonosságokat!

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet 143.-144. oldal. $\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcosh}(x)\right) + C$

8. (10 pont) Használja a forgástestek térfogatára vonatkozó integrál-formulát az origó körüli 3 egység sugarú gömb térfogatának kiszámolására!

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet 160.-161. oldal. $V = \frac{4}{3}3^3\pi = 36\pi \approx 113.09$

9. (10 pont) Magyarázza el rajz segítségével, hogy miért improprius az $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$ integrál, és számítsa ki az integrál értékét! Konvergens-e vagy pedig divergens ez az improprius integrál?

   Megoldás: Utolsó gyakorlaton volt. $\int \frac{x+1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x) + C$,

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0_+}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x)\right]_a^1 = \frac{1}{2}\ln(3) - \lim_{a\to 0_+}\frac{1}{2}\ln(a^2+2a) = \frac{1}{2}\ln(3) - (-\infty) = +\infty$$

   Tehát az improprius integrál divergens.