# Építőmérnöki Matematika A1 vizsga, 2016. Június 7.
# Megoldások:

1. (10 pont) Legyen $P(2,2,2)$, $Q(1,3,0)$ és $R(1,1,5)$ három pont az $\mathbb{R}^3$ térben. Határozza meg a $P$ és $Q$ pontokon átmenő $e$ egyenes és az $R$ pont távolságát.

   **Megoldás:** $\overrightarrow{QP} = (1,-1,2)$, tehát $e$ paraméteres egyenlete: $x = 1+t$, $y = 3-t$, $z = 2t$. Innentől fogva a megoldás ugyanaz, mint a szkennelt jegyzet 16-17. oldalán. Tehát a keresett távolság $\sqrt{5}$.

2. (a) (4 pont) Mondja ki az $a_1, a_2, a_3, \dots$ sorozat konvergenciájának és határértékének definícióját!

   **Megoldás:** Lásd szkennelt jegyzet 23. oldal.

   (b) (6 pont) Legyen $a_n = \sqrt{\frac{n-4}{n}}$. Határozza meg $\lim_{n\to\infty} a_n$ értékét és az $\varepsilon = 0.1$ értékhez tartozó $N$ küszöbindexet!

   **Megoldás:** Lásd szkennelt jegyzet 34. oldal. $n \geq N = 22$ esetén $|a_n - 1| < 0.1$

3. (a) (2 pont) Írja fel az $f$ függvény $x_0$ pontban vett $f'(x_0)$ derivátjának definícióját, a különbségi hányados függvény határértékeként!

   **Megoldás:** Lásd szkennelt jegyzet 58. oldal.

   (b) (3 pont) $f(x) = x^2$. Az (a) pontbeli definíció szerint számítsa ki $f'(2)$ értékét (tehát írja fel és számítsa ki a különbségi hányados függvény határértékét)!

   **Megoldás:** (59.oldal) $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4.$

   (c) (2 pont) $f(x) = x^2$. Írja fel az $(2, f(2))$ és $(2.1, f(2.1))$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.

   **Megoldás:** Egyenes meredeksége (58. oldal): $\frac{f(2.1)-f(2)}{2.1-2} = 10 \cdot \left((2.1)^2 - 2^2\right) = 4.1$
   A $(2, f(2))$ ponton átmenő $m$ meredekségű egyenes egyenlete: $y - y_0 = m\cdot(x - x_0)$, azaz $y - f(2) = m\cdot(x-2)$, azaz $y - 4 = 4.1\cdot(x-2)$.

   (d) (3 pont) Írja fel az $y = x^2$ görbét az $x_0 = 2$ pontban érintő egyenes egyenletét!

   **Megoldás:** Most $m = f'(2) = 4$, tehát $y - 2^2 = 4\cdot(x-2)$.

4. (10 pont) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}\right) =$? *Segítség:* L'Hospital-szabály

   **Megoldás:** Lásd szkennelt jegyzet 74. oldal. Ott ugyan nem $\mathrm{sh}(x)$, hanem $\sin(x)$ van, de a számolás és az eredmény ugyanaz: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}\right) = 0.$

5. (a) (5 pont) Az $f(x)$ függvény $x_0$ pontban vett $G(x_0)$ görbületét a $G(x_0) = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ képlettel definiáltuk. Nevezze néven a fenti képletben előforduló mennyiségeket, és egy grafikonon ábrázolja őket az órán tanult módon.

   **Megoldás:** Lásd szkennelt jegyzet 109. oldal.

   (b) (5 pont) Számítsa ki az $y = \sin(x/2)$ függvény $x_0 = \pi$ pontjában a simulókör sugarát!

   **Megoldás:** Lásd szkennelt jegyzet 112. oldal. Most: $y' = \frac{1}{2}\cos(x/2)$, $y'' = -\frac{1}{4}\sin(x/2)$. Tehát $y'(\pi) = 0$, $y''(\pi) = -\frac{1}{4}$. Tehát $G(\pi) = \frac{-1/4}{(1+0^2)^{3/2}} = -\frac{1}{4}$. Tehát a simulókör sugara 4.

6. (a) (5 pont) $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x =$? *Segítség:* Kezdje teljes négyzetté alakítással!

   **Megoldás:** Lásd szkennelt jegyzet 124. oldal. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(\frac{x-2}{2}) + C$

(b) (5 pont) $\int \arctan(3x)\,\mathrm{d}x = ?$ *Segítség:* Parciális integrálás ...

**Megoldás:** Lásd szkennelt jegyzet 126. oldal. $\int \arctan(3x)\,\mathrm{d}x = x\arctan(3x) - \frac{1}{6}\log(9x^2+1) + C$

7. (10 pont) $\int \frac{13x^2-2}{x^3-\frac{3}{2}x^2-x}\,\mathrm{d}x = ?$ *Segítség:* Nevező faktorizálálsa, majd parciális törtekre bontás ...

**Megoldás:** Lásd szkennelt jegyzet 132. oldal. Most:

$$\int \frac{13x^2-2}{x^3-\frac{3}{2}x^2-x}\,\mathrm{d}x = 10\log(|x-2|) + 2\log(|x|) + \log(|x+\frac{1}{2}|) + C$$

8. (10 pont) Számítsa ki annak a pozitív síknegyedbe eső, origót tartalmazó, összefüggő síkidomnak a területét és súlypontjának a koordinátáit, amit az $y=\cos(x)$ görbe és a koordinátatengelyek határolnak.

**Megoldás:** Lásd szkennelt jegyzet 163. oldal. Itt: $T = \int_0^{\pi/2}\cos(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}.$$

$$M_y = \int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Tehát a súlypont koordinátái: $S_x = \frac{\pi}{2} - 1$ és $S_y = \frac{\pi}{8}$.

9. Az integrandusok felrajzolásával illusztrálja, hogy miért impropriusak az alábbi integrálok, majd számítsa ki az értéküket!

(a) (5 pont) $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

**Megoldás:** Lásd szkennelt jegyzet 168. oldal (és 121. oldal):

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0_+}\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0_+}\left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_a^1 = 0 - \frac{1}{2}\lim_{a\to 0_+}\ln^2(a) = -\infty$$

Tehát divergens ez az improprius integrál.

(b) (5 pont) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

**Megoldás:** Lásd szkennelt jegyzet 169. oldal. Ha $u = x-1$, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \pi$$