A csoport

1	2	3	4	ÖSSZ

Építőmérnöki BSc szak, Matematika A1, 3. ZH., 2019. május 9., 10.15-11.00

1. (a) (1 pont) Írja fel a f függvény $x_0 = 1$ alappont körüli harmadrendű $T_3(x)$ Taylor-polinomjának definícióját.

   (b) (1 pont) Írja fel f függvény $x_0 = 1$ alappont körüli harmadrendű $T_3(x)$ Taylor-polinomjához tartozó $R_3(x)$ hibatag definícióját.

   (c) (1 pont) Mondja ki a hibatag becslésére vonatkozó Taylor-tételt a fenti esetben (az alappont $x_0 = 1$, harmadrendű Taylor-polinom).

   (d) (2 pont) Tegyük fel továbbá, hogy

   $$f(1) = 2, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) = 2, \quad f'''(1) = 3, \quad f^{(4)}(x) = 12e^{-x}.$$

   Írja fel, hogy a $x_0 = 1$ alappont körüli harmadrendű Taylor-polinom segítségével milyen közelítést kapunk $f(0)$ értékére, továbbá azt is, hogy milyen felső becslést adhatunk a közelítésünk hibájára a Taylor-tétel segítségével.

   Megoldás:

   (a) $T_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(1)(x-1)^3$

   (b) $R_3(x) = f(x) - T_3(x)$

   (c) Minden $x \in \mathbb{R}$-hez van olyan $b \in (1, x)$, hogy $R_3(x) = \frac{f^{(4)}(b)}{24}(x-1)^4$.

   (d) Ekkor $T_3(x) = 2 + 0 \cdot (x-1) + \frac{1}{2}2 \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{6}3 \cdot (x-1)^3 = 2 + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3$.
   Tehát az $f(0)$-ra adott közelítésünk $T_3(0) = 2 + (0-1)^2 + \frac{1}{2}(0-1)^3 = 2 + 1 - \frac{1}{2} = 5/2$.
   Hibabecslés: $|R_3(-1)| = \left|\frac{12e^{-b}}{24}(0-1)^4\right| = \frac{1}{2}e^{-b}$ valamilyen $b \in (0,1)$-re.
   Tehát $|R_3(-1)| \leq \max_{0 \leq b \leq 1} \frac{1}{2}e^{-b} = \frac{1}{2}e^{-0} = \frac{1}{2}$.

2. (5 pont) Az $x^2 + y^2/4 = 1$ egyenletű ellipszis mely pontjaiban párhuzamos az érintő az $x + y + 2 = 0$ egyenletű egyenessel?

   Instrukció: Használja az implicit függvény deriválásáról tanultakat! Készítsen rajzot is!

   Megoldás: Két ilyen pontja van az ellipszisnek: $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}})$ és $(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}})$. Rajzot most nem csináltam: az ellipszis a koordináta-tengelyeket a $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$, $(0,-2)$ pontokban metszi. A megoldás nagyon hasonló a szkennelt jegyzet 96.-97. oldalán leírt feladatéhoz.

3. (5 pont) Keresse meg $y = e^{-x}$ görbe azon pontját, melyben a görbület maximális.

   Megoldás: A görbület az (x_0, y_0) pontban maximális, ahol $x_0 = \frac{1}{2}\ln(2)$ és $y_0 = e^{-x_0} = 1/\sqrt{2}$.
   A megoldás nagyon hasonló a 113. oldalán leírt feladatéhoz.

4. Számolja ki a következő határozatlan integrálokat:

   (a) (3 pont) $\int x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

   (b) (2 pont) $\int x\cos(3x)\,\mathrm{d}x$

   Megoldás:

(a) $\int x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2}+C$, ez kijön az $u = x^2-1$ helyettesítéssel is, vagy a képletgyűjtemény $\int f' f^{\alpha}$ képletével is, ahol $f(x) = x^2-1$ és $\alpha = \frac{1}{2}$.

(b) parciális integrálással: $\int x\cos(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$