A csoport

1	2	3	4	ÖSSZ

Építőmérnöki BSc szak, Matematika A1, 2. ZH., 2019. április 4., 10.15-11.00

Név: .... Neptun kód: ....

1. (a) (2 pont) Tegyük fel, hogy az f függvény x_0 pontbeli deriváltjaira teljesül, hogy $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k)}(x_0) = 0$, viszont $f^{(k+1)}(x_0) \neq 0$ valamilyen $k \geq 1$ esetén. Milyen esetekben lesz x_0 az f lokális maximuma, lokális minimuma, illetve inflxiós pontja?

   Megoldás:

   Ha k páratlan, akkor $k+1$ páros, és x_0 lokális szélsőérték, továbbá ha $f^{(k+1)}(x_0) > 0$, akkor x_0 lokális minimum, de ha $f^{(k+1)}(x_0) < 0$, akkor x_0 lokális maximum.

   Ha k páros, azaz ha $k+1$ páratlan, akkor x_0 inflexiós pont.

   Lásd szkennelt jegyzet 87. oldala.

   (b) (3 pont) Legyen $f(x) = (x-3)^5 - (x-3)^4$. Az $x_0 = 3$ pont lokális maximuma, lokális minimuma, vagy pedig inflexiós pontja f-nek? Válaszát számolással indokolja!

   Megoldás:

   $f'(x) = 5(x-3)^4 - 4(x-3)^3$, $f'(3) = 5(3-3)^4 - 4(3-3)^3 = 0$.
   $f''(x) = 20(x-3)^3 - 12(x-3)^2$, $f''(3) = 20(3-3)^3 - 12(3-3)^2 = 0$.
   $f^{(3)}(x) = 60(x-3)^2 - 24(x-3)$, $f^{(3)}(3) = 60(3-3)^2 - 24(3-3) = 0$.
   $f^{(4)}(x) = 120(x-3) - 24$, $f^{(4)}(3) = 120(3-3) - 24 = -24$.
   Tehát $x_0 = 3$ lokális maximuma f-nek.

2. Határozza meg a következő függvények második deriváltját:

   (a) (2 pont) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$

   Megoldás:

   $f'(x) = 4\left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 \frac{-1}{x^2}$.

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(4\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \frac{-1}{x^2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(4\left(1+\frac{1}{x}\right)^3\right)\frac{-1}{x^2} + 4\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{-1}{x^2}\right) =$$
$$12\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \frac{-1}{x^2}\frac{-1}{x^2} + 4\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \frac{2}{x^3} = 12\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \frac{1}{x^4} + 4\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \frac{2}{x^3}$$

   (b) (3 pont) $g(x) = \frac{1}{5}\cot(2x-1)$

   Megoldás:

   $g'(x) = \frac{1}{5}\frac{-1}{\sin^2(2x-1)}2 = \frac{2}{5}\frac{-1}{\sin^2(2x-1)}$

   $g''(x) = \frac{2}{5}\frac{(-1)'\sin^2(2x-1) - (-1)(\sin^2(2x-1))'}{(\sin^2(2x-1))^2} = \frac{2}{5}\frac{2\sin(2x-1)\cos(2x-1)2}{\sin^4(2x-1)} = \frac{8}{5}\frac{\cos(2x-1)}{\sin^3(2x-1)}$

3. (5 pont) Határozza meg a c és a d konstansok értékét oly módon, hogy az alábbi f függvény folytonos legyen:

$$f(x) = \begin{cases} c\frac{\sinh(x^2)}{\sinh^2(x)}, & x < 0, \\ d, & x = 0, \\ \frac{\cosh(x^2)}{\cosh^2(x)}, & x > 0. \end{cases}$$

Megj: $\sinh(x)$ a szinusz hiperbolikuszt jelöli, $\cosh(x)$ a koszinusz hiperbolikuszt

Megoldás: A 0-ban vett jobb és bal oldali határértéknek egyaránt meg kell egyeznie a 0-ban vett helyettesítési értékkel, és akkor lesz 0-ban folytonos az f. Amúgy minden más pontban folytonos.

f 0-ban vett bal oldali határértéke 0/0 típusú (hiszen $\sinh(0) = 0$, így L'Hospital-szabállyal számoljuk:

$$\lim_{x\to 0-} c\frac{\sinh(x^2)}{\sinh^2(x)} = c \lim_{x\to 0-} \frac{(\sinh(x^2))'}{(\sinh^2(x))'} = c \lim_{x\to 0-} \frac{\cosh(x^2)2x}{2\sinh(x)\cosh(x)}$$

Sajnos ez is egy 0/0 típusú határérték, így még egyszer be kell vetnünk a L'Hospital-szabályt:

$$c \lim_{x\to 0-} \frac{\cosh(x^2)2x}{2\sinh(x)\cosh(x)} = c \lim_{x\to 0-} \frac{(\cosh(x^2)2x)'}{(2\sinh(x)\cosh(x))'} =$$

$$c \lim_{x\to 0-} \frac{\sinh(x^2)4x^2 + \cosh(x^2)2}{2\cosh^2(x) + 2\sinh^2(x)0} = c\frac{0+2}{2+0} = c$$

Tehát f 0-ban vett bal oldali határértéke c.

f 0-beli helyettesítési értéke d.

f 0-ban vett jobb oldali határértéke $\lim_{x\to 0+} \frac{\cosh(x^2)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh(0)}{\cosh^2(0)} = \frac{1}{1} = 1$.

Tehát ahhoz, hogy f folytonos legyen 0-ban, az kell, hogy $c = d = 1$ legyen.

Hasonló feladatot a szkennelt jegyzet 76-ik oldalán oldottunk meg.

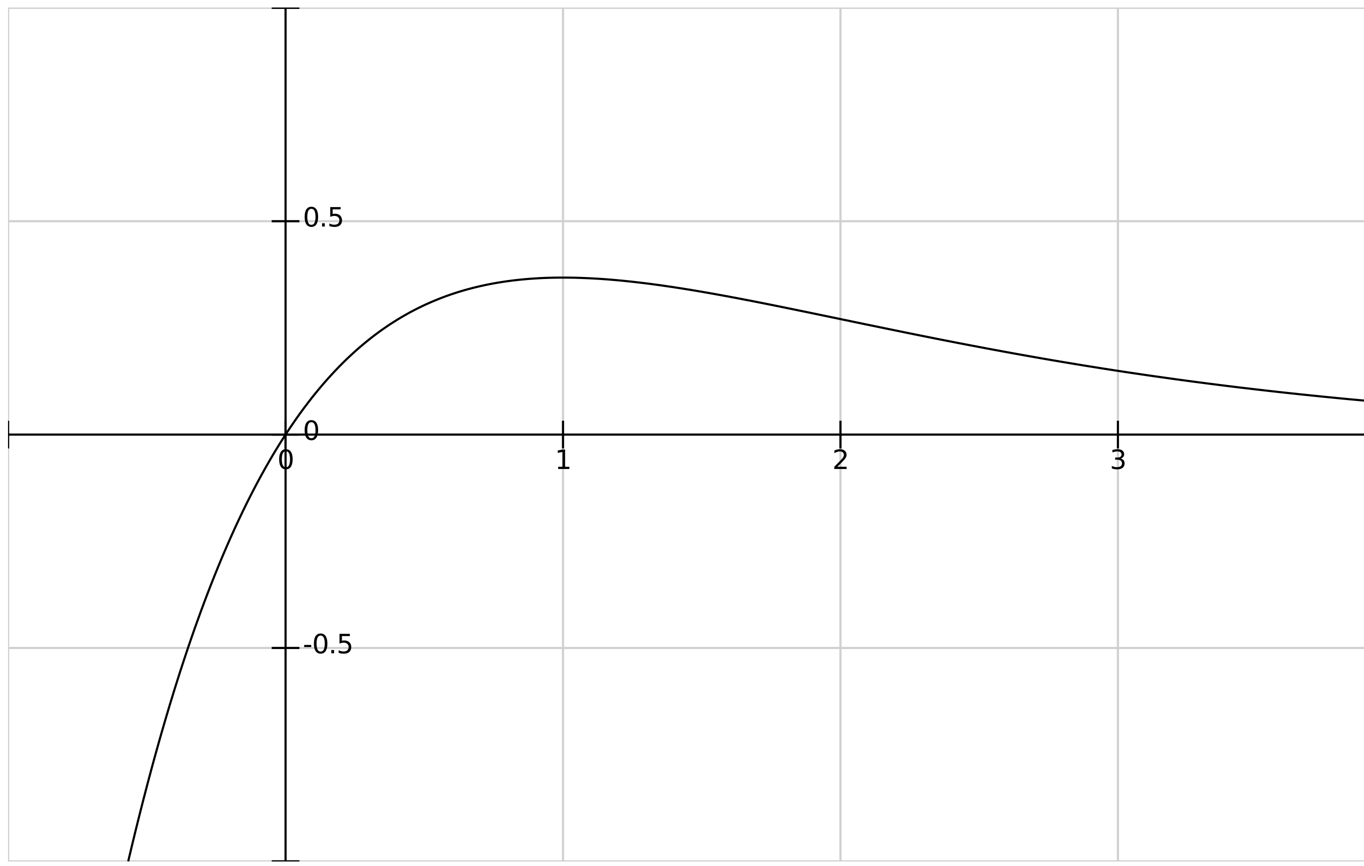
4. Legyen $f(x) = xe^{-x}$.

   (a) (1 pont) Számolja ki f első és második deriváltját.
   Megoldás:
   $f'(x) = x'e^{-x} + x(e^{-x})' = (1-x)e^{-x}$.
   $f''(x) = (1-x)'e^{-x} + (1-x)(e^{-x})' = (x-2)e^{-x}$

   (b) (1 pont) Határozza meg, hogy az f függvény mely intervallumokon monoton növő, illetve monoton csökkenő.
   Megoldás: $f'(x) > 0$, ha $x < 1$, viszont $f'(x) < 0$, ha $x > 1$. Tehát f nő $(-\infty, 1)$-en, csökken $(1, +\infty)$-n.

   (c) (1 pont) Határozza meg, hogy az f függvény mely intervallumokon konvex, illetve konkáv.
   Megoldás: $f''(x) < 0$, ha $x < 2$, viszont $f''(x) > 0$, ha $x > 2$. Tehát f konkáv $(-\infty, 2)$-n, konvex $(2, +\infty)$-n.

   (d) (2 pont) Készítsen vázlatos rajzot a függvény grafikonjáról, a lokális szélsőérték-helyek és inflexiós pontok megjelölésével!
   Megoldás: Lokális maximum $x = 1$-ben, inflexiós pont $x = 2$-ben. Rajz: a következő oldalon. Google: "plot graph function".


0.5
0
-0.5
0
1
2
3