C csoport

1	2	3	4	össz

Építőmérnöki BSc szak, Matematika A1, 3. ZH., 2017. április 28., 11.10-11.55

Név: .... Neptun kód: ....

Karikázza be a gyakorlatának időpontját: Csüt 12:15-14:00 (K374), Csüt 14:15-16:00 (K371)

1. (a) (2 pont) Definiálja az $f(x)$ függvény primitív függvényének és az $f(x)$ függvény határozatlan integráljának a fogalmát, különös tekintettel a két fogalom közti különbségre.

   (b) (1 pont) Legyen $T(x_0)$ az $g(x)$ függvény görbéje alatti terület 0-tól x_0-ig. Mondja ki azt az órán tanult formulát, amely a $T'(x)$ derivált értékére ad egyszerű képletet.

   (c) (2 pont) Ha $g(x) = e^{3x}$, adjon formulát $T(x)$ értékére!

   Megoldás:

   (a) Lásd szkennelt jegyzet 114. oldal.

   (b) $T'(x) = g(x)$, lásd 115-116. oldal.

   (c) $T(x) = \frac{e^{3x}-1}{3}$, lásd 116. oldal.

2. (5 pont) Egy körhenger felülete egyenlő a tetején és az alján levő körlapok területének, valamint a körhenger palástjának a felületének az összegével. Az 500 négyzetcentiméter felületű körhengerek közül melyiknek a legnagyobb a térfogata?

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet 91. oldal.

3. (a) (2 pont) Írja fel az $f(x) = e^{-x}$ függvény $x_0 = 0$ alappont körüli harmadrendű $T_3(x)$ Taylor-polinomját!

   (b) (1 pont) Közelítse $e^{-1/2}$ értékét $T_3(x)$ segítségével!

   (c) (2 pont) Becsülje a közelítés hibáját a Taylor-tétel segítségével.

   Megoldás:

   (a) $f(x) = e^{-x}$, $f'(x) = -e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x}$, $f'''(x) = -e^{-x}$, $f^{(4)}(x) = e^{-x}$.
   $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = 1$, $f'''(0) = -1$
   $T_3(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2}f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{6}f'''(0) \cdot x^3$
   $T_3(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$

   (b) e^{-x} értékét közelíti $T_3(x)$, azaz $e^{-1/2}$ értékét közelíti $T_3(1/2)$, azaz
   $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \approx 0.604$

   (c) Taylor-tétel:

$$|e^{-1/2} - T_3(1/2)| \leq \frac{1}{4!} \max_{0 \leq b \leq 1/2} |f^{(4)}(b)| \left(\frac{1}{2} - 0\right)^4 = \frac{1}{24} \max_{0 \leq b \leq 1/2} e^{-b} \frac{1}{16} = \frac{1}{384} e^{-0} \approx 0.0026$$

4. (a) (2 pont) Számítsa ki az $\int \frac{1}{(3-2x)^2}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált!

(b) (3 pont) Számítsa ki az $\int x\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált!
Segítség: Az integrál kiszámításának egy lehetséges módja: $u = x^2+1$ helyettesítés.

Megoldás:

(a) $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$, tehát az
$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \implies \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$
képlet felhasználásával
$\int \frac{1}{(3-2x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3-2x}\right) + C = \frac{1}{6-4x} + C$

(b) $u = x^2+1$, tehát $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x$, tehát $x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u$, és így

$$\int x\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt[3]{x^2+1}\,x\mathrm{d}x =$$
$$\int \sqrt[3]{u}\frac{1}{2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int u^{1/3}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{3}+1}u^{4/3} + C = \frac{3}{8}(x^2+1)^{4/3} + C$$