A csoport

1	2	3	4	ÖSSZ

Építőmérnöki BSc szak, Matematika A1, 3. ZH., 2017. április 28., 10.15-11.00

Név: .... Neptun kód: ....

Karikázza be a gyakorlatának időpontját: Csüt 12:15-14:00 (K374), Csüt 14:15-16:00 (K371)

1. (a) (2 pont) Definiálja az $f(x)$ függvény $a = \pi$ alappont körüli másodrendű $T_2(x)$ Taylor-polinomját és $R_2(x)$ maradéktagját! Mondja ki a maradéktagra vonatkozó Taylor-tételt az $n = 2$, $a = \pi$ speciális esetben!

   (b) (3 pont) Határozza meg az $f(x) = \sin(x/2)$ függvény $a = \pi$ alappont körüli másodrendű $T_2(x)$ Taylor-polinomját.

   Megoldás:

   (a) $T_2(x) = f(\pi) + f'(\pi) \cdot (x - \pi) + \frac{1}{2} f''(\pi) \cdot (x - \pi)^2$
   $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$

   (b) Minden x-hez van olyan $b \in (\pi, x)$, hogy $R_2(x) = \frac{1}{6} f'''(b) \cdot (x - \pi)^3$, lásd szkennelt jegyzet 105. oldal.

2. (a) (4 pont) Írja fel azoknak az egyeneseknek az egyenletét, melyek érintik az $x^2 - 4y^2 = 4$ egyenletű hiperbolát ás párhuzamosak az $x - 5y + 2 = 0$ egyenletű egyenessel.
   Segítség: Használja az implicit függvények differenciálásáról tanultakat!

   (b) (1 pont) Készítsen rajzot az $x^2 - 4y^2 = 4$ egyenletű hiperboláról és a hiperbola azon érintő egyeneseiről, amelyek párhuzamosak az $x - 5y + 2 = 0$ egyenletű egyenessel.

   Megoldás: (Csákány Anikó-féle feladatsor, 3. feladat)

   Az egyenes meredeksége $m = \frac{1}{5}$.

   Implicit egyenlet: $x^2 - 4y^2(x) = 4$.

   Implicit derivált: $2x - 8y(x)y'(x) = 0$, tehát $y'(x) = \frac{1}{4}\frac{x}{y(x)}$.

   Tehát olyan (x, y) pontot keresünk, amire $x^2 - 4y^2 = 4$ és $\frac{1}{4}\frac{x}{y} = \frac{1}{5}$.

   Azaz $y = \frac{5}{4}x$, és $x^2 - 4\left(\frac{5}{4}x\right)^2 = 4$, azaz $-\frac{21}{4}x^2 = 4$. Ilyen x nincs, tehát a hiperbolának nincs $\frac{1}{5}$ meredekségű érintője.

3. (a) (1 pont) Számítsa ki $y = e^x$ görbe $G(x)$ görbületét abban a pontban, aminek a vízszintes koordinátája x.

   (b) (4 pont) Keresse meg az $y = e^x$ görbe azon pontjának x koordinátáját, amelyben a $G(x)$ görbület a lehető legnagyobb, azaz keresse meg a $G(x)$ függvény globális maximumhelyét!

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet 113. oldal.

4. (a) (3 pont) Számítsa ki az $\int \frac{x}{\sqrt[3]{5-x^2}}\, dx$ határozatlan integrált!
   Segítség: Az integrál kiszámításának egy lehetséges módja: $u = 5 - x^2$ helyettesítés.

(b) (2 pont) Számítsa ki az $\int \frac{1}{\sin^2(\pi-3x)}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált!

Megoldás:

(a) $u = 5 - x^2$, tehát $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2x$, tehát $x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{d}u$. Tehát

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{5-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt[3]{5-x^2}}\,x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u =$$
$$-\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}u^{\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{4}(5-x^2)^{\frac{2}{3}} + C$$

(b) A képletgyűjtemény alapján $\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\cot(x) + C$, tehát az
$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \implies \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$
képlet felhasználásával
$\int \frac{1}{\sin^2(\pi-3x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cot(\pi - 3x) + C$