C csoport

1	2	3	4	össz

Építőmérnöki BSc szak, Matematika A1, 2. ZH., 2017. március 31., 11.10-11.55

Név: .... Neptun kód: ....

Karikázza be a gyakorlatának időpontját: Csüt 12:15-14:00 (K374), Csüt 14:15-16:00 (K371)

1. (a) (1 pont) Definiálja, hogy mikor kölcsönösen egyértelmű egy f függvény!
   (b) (1 pont) Definiálja az f függvény inverz-függvényének fogalmát!
   (c) (3 pont) Határozza meg az $f(x) = \sqrt{2x+3} + 5$ függvény inverz-függvényét!

   Megoldás:

   (a) Lásd szkennelt jegyzet 35. oldal alja, 36. oldal teteje.
   (b) Lásd 37. oldal.
   (c) Lásd 38. oldal teteje.

2. (a) (4 pont) Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, ami az $f(x) = \sqrt{2x-2}$ függvény görbéjét az $(x_0, f(x_0))$ pontban érinti, ahol $x_0 = 3$.
   (b) (1 pont) Készítsen rajzot f grafikonjáról és az (a) részfeladatbeli érintő egyenesről.

   Megoldás:

   (a) $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2x-2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$, tehát az egyenes meredeksége $m = f'(3) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3 - 2}} = \frac{1}{2}$.
   Az egyenes egyenlete: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, ahol $x_0 = 3$, $y_0 = f(x_0) = 2$, tehát az egyenes egyenlete: $y - 2 = \frac{1}{2}(x-3)$.
   (b) Lásd Wolfram Alpha.

3. (5 pont) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{(\mathrm{sh}(x))^2} =?$ *Segítség:* L'Hospital-szabály

   Megoldás:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{(\mathrm{sh}(x))^2} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - \cos(x) - x)'}{((\mathrm{sh}(x))^2)'} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin(x) - 1}{2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(e^x + \sin(x) - 1)'}{(2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x))'} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos(x)}{2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(x) + 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(x)} = \frac{e^0 + \cos(0)}{2\,\mathrm{ch}(0)\,\mathrm{ch}(0) + 2\,\mathrm{sh}(0)\,\mathrm{sh}(0)} = \frac{1+1}{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0^2} = 1,$$

   ahol a $(*)$-al jelölt egyenlőségjelek bal oldalán $\frac{0}{0}$ alakú limesz áll, így a L'Hospital-szabályt alkalmaztuk.

4. (5 pont) Határozza meg az $f(x) = xe^{-2x}$ függvény kritikus pontjait, és döntse el, hogy a kritikus pontok közül melyik lokális maximum és melyik lokális minimum.

Megoldás:

$f'(x) = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = e^{-2x}(1-2x)$

$f''(x) = (e^{-2x}(1-2x))' = \dots = 4e^{-2x}(x-1)$

Kritikus pontok: $f'(x) = 0$ akkor teljesül, ha $1 - 2x = 0$, hiszen $e^{-2x} > 0$ minden x esetén. Tehát $x = \frac{1}{2}$ az egyetlen kritikus pontja f-nek.

$f''(\frac{1}{2}) = 4e^{-1}(-\frac{1}{2}) < 0$, hiszen $e^{-1} > 0$. Tehát $x = \frac{1}{2}$ egy lokálisan konkáv kritikus pont, azaz lokális maximum.