A csoport

1	2	3	4	össz

Építőmérnöki BSc szak, Matematika A1, 2. ZH., 2017. március 31., 10.15-11.00

Név: .... Neptun kód: ....

Karikázza be a gyakorlatának időpontját: Csüt 12:15-14:00 (K374), Csüt 14:15-16:00 (K371)

1. (a) (1 pont) Mondja ki az f függvény x_0 pontban vett bal oldali határértékének a definícióját.
   (b) (1 pont) Mondja ki, hogy mikor folytonos az f függvény.
   (c) (3 pont) Határozza meg az A paramétert oly módon, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x}, & \text{ha } x > 0, \\ A - \cosh(x), & \text{ha } x \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

   képlettel definiált f függvény folytonos legyen!

   Megoldás:

   (a) Lásd szkennelt jegyzet 50. oldal.
   (b) Lásd szkennelt jegyzet 55.-56. oldal.
   (c) Az $x = 0$ pontban kérdéses csak az f folytonossága.
   Bal oldali határérték: $\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} A - \cosh(x) = A - \cosh(0) = A - 1$.
   Jobb oldali határérték: $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{e^{2x}-1}{x} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{2e^{2x}}{1} = \frac{2e^{2\cdot 0}}{1} = 2$.
   A $(*)$-al jelölt határérték $\frac{0}{0}$ típusú, és L'Hospital-szabállyal számoltunk ki.
   Tehát $A - 1 = 2$ kell, hogy legyen, és akkor f folytonos lesz 0-ban is. Tehát $A = 3$.

2. (1+2+2 pont) Számítsa ki a következő függvények deriváltját:

$$(a)\ f(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{x^2} \qquad (b)\ g(x) = \ln(\sin(x^2 + 5x)) \qquad (c)\ h(x) = x^x$$

   Megoldás: http://www.math.bme.hu/∼csandor/A1/2014151/Derivalas.pdf

   Erről a feladatsorról ezek a 3/(h), a 4/(l) és az 5/(a) feladatok, a megoldás is megtalálható ugyanott.

3. (5 pont) Határozza meg az $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 4$ függvény globális minimumát és globális maximumát az $[1, 4]$ intervallumon.

   Megoldás:

   $f'(x) = 6x^2 - 18x = 6x(x - 3)$, tehát f kritikus pontjai $x = 0$ és $x = 3$. Ezek közül csak az $x = 3$ esik bele a $[1, 4]$ intervallumba. A szélsőérték-gyanús pontok tehát $x = 1, x = 3, x = 4$, azaz az intervallum végpontjai és az intervallumba eső kritikus pont (lásd szkennelt jegyzet 80. oldal).

   $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 4 = 2 - 9 + 4 = -3$

$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 4 = -23$

$f(4) = 2 \cdot 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 4 = 2 \cdot 64 - 9 \cdot 16 + 4 = -12$

Tehát a globális maximum -3, a globális minumum -23.

4. (a) (4 pont) Határozza meg, hogy az $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ függvény mely intervallumokon konvex, illetve konkáv.

   (b) (1 pont) Rajzon ábrázolja az f függvény grafikonját, az inflexiós pontok megjelölésével.

Megoldás:

(a) $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, így

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot (1+x^2)^2 - (-2x) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2 \cdot (1+x^2) - (-2x) \cdot 2 \cdot 2x}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

Először keressük meg, hogy $f''(x) = 0$ milyen x esetén teljesül. A nevező mindíg pozitív, így olyan x-eket keresünk, amire $6x^2 - 2 = 0$. Azaz $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ esetén lesz $f''(x) = 0$ és ha $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ vagy $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$, akkor $f''(x) > 0$, viszont ha $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, akkor $f''(x) < 0$. Tehát a $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ intervallumon f konvex, a $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ intervallumon az f konkáv, és az $(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$ intervallumon f konvex. Inflexiós pontok: $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(b) Lásd Wolfram Alpha.