C csoport

1	2	3	4	ÖSSZ

Építőmérnöki BSc szak, Matematika A1, 1. ZH., 2017. március 3., 11.05-11.50

Név: .... Neptun kód: ....

Karikázza be a gyakorlatának időpontját: Csüt 12:15-14:00 (K374), Csüt 14:15-16:00 (K371)

1. (a) (2 pont) Írja le az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ három dimenziós vektorok $\underline{w} = \underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzatának szemléletes geometriai jelentését: mi $\underline{w}$ hossza, iránya? Mi az a „jobbkéz-szabály”?

   (b) (2 pont) Legyen $\underline{a} = (-1, 0, 3)$ és $\underline{b} = (1, 2, 1)$. Számítsa ki a $\underline{a} \times \underline{b}$ vektort.

   (c) (1 pont) Ellenőrizze a (b) feladat végeredményét!

   Segítség: Milyen vektorokra kell merőlegesnek lennie $\underline{a} \times \underline{b}$-nek?

   Megoldás: Lásd szkennelt jegyzet 10-11. oldal.

2. Tekintsük a $z^3 + 8 = 0$ egyenletet.

   (a) (2 pont) Adja meg a fenti egyenlet mindhárom megoldását trigonometrikus alakban.

   (b) (2 pont) Adja meg a fenti egyenlet mindhárom megoldását algebrai alakban.

   (c) (1 pont) Rajzolja le a komplex számsíkon a fenti egyenlet mindhárom megoldását.

   Megoldás:

   (a) $\sqrt[3]{-8}$ lehetséges z_0, z_1, z_2 értékeit keressük. $-8 = 8 \cdot (\cos(\pi) + i \sin(\pi)$. Tehát

   $$z_k = 2 \cdot (\cos(\pi/3 + k\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\pi/3 + k\frac{2\pi}{3}), \qquad k = 0, 1, 2.$$

   (b) $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_1 = -2$, $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$.

   (c) Lásd a szkennelt jegyzet $7 + \frac{1}{2}$-ik oldalán a rajzot (ott a kör sugara 3, itt pedig 2).

3. Legyen $\underline{u} = (1, -1, 0)$ és $\underline{v} = (1, 0, -1)$.

   (a) (1 pont) Számítsa ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok átal bezárt szög koszinuszát!

   (b) (2 pont) Számítsa ki az $\underline{u}$ vektor merőleges vetületét a $\underline{v}$ vektor egyenesére!

   (c) (2 pont) Írja fel az $\underline{u}$-t egy $\underline{v}$-vel párhuzamos és egy $\underline{v}$-re merőleges vektor összegeként.

   Megoldás:

   (a) $\cos(\gamma) = 1/2$, lásd szkennelt jegyzet 9. oldal.

   (b) Jelöljük $\underline{w}$-vel a keresett merőleges vetületet. $\underline{w} = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\underline{v} \cdot \underline{v}} \underline{v} = \frac{1}{2} \underline{v} = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

   (c) Legyen $\underline{w}^* = \underline{u} - \underline{w} = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$. Ekkor $\underline{u} = \underline{w} + \underline{w}^*$, továbbá $\underline{w}$ párhuzamos $\underline{v}$-vel és $\underline{w}^*$ merőleges $\underline{v}$-re, azaz $\underline{w}^*$ és $\underline{v}$ skaláris szorzata nulla.

4. (5 pont) Mondja meg az $a_n = \sqrt{\frac{n-8}{4n}}$ sorozat határértékét és számolja ki az $\varepsilon = 0.01$ értékhez tartozó küszöbindexet!

Megoldás: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{4} - 0} = \frac{1}{2}$.

$|a_n - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{n}}$, tehát azt szeretnénk, hogy $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{n}} < 0.01$ teljesüljön.

Azaz azt szeretnénk, hogy $0.49 < \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{n}}$ teljesüljön.

Azaz azt szeretnénk, hogy $0.2401 < \frac{1}{4} - \frac{2}{n}$ teljesüljön.

Azaz azt szeretnénk, hogy $\frac{2}{n} < 0.0099$ teljesüljön.

Azaz azt szeretnénk, hogy $\frac{2}{0.0099} < n$ teljesüljön.

Azaz azt szeretnénk, hogy $202.02 < n$ teljesüljön.

Legyen tehát a küszöbindex $N = 203$, és akkor minden $n \geq N$ esetén $|a_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ teljesül.