PL: $ch'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} =$

$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$ HASONLÓAN: $\boxed{sh'(x) = ch(x)}$

PL: $th'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right) =$ HÁNYADOS $=$ $\boxed{\text{LÁSD 43. OLDAL}}$

$= \frac{sh'(x)\cdot ch(x) - sh(x)\cdot ch'(x)}{ch^2(x)} = \frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)} =$

$= \frac{1}{ch^2(x)}$

PL: $sin'(x) = ?$ TUDJUK: $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1}$ $\boxed{\text{LÁSD 51. OLDAL}}$

TUDJUK: $sin(\alpha) - sin(\beta) = 2\cdot cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$sin'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sin(x+h) - sin(x)}{h} =$ $\boxed{\boxed{\alpha = x+h} \quad \boxed{\beta = x}}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{2\cdot h/2} = cos(x)\cdot 1$

HASONLÓAN: $cos'(x) = -sin(x)$

$tan'(x) = 1/cos^2(x)$ $\boxed{\text{63. OLDAL}}$

PL: $\arctan'(x) = ?$ $\quad \tan(\arctan(x)) = x$

DERIVÁLJUK MINDKÉT OLDALÁT:

$$\tan'(\arctan(x)) \cdot \arctan'(x) = 1$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))} \cdot \arctan'(x) = 1} \Leftarrow ☆$$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = (\tan(x))^2 + 1 \quad @$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))} = (\tan(\arctan(x)))^2 + 1 = x^2 + 1}$$

$$☆ \ \& \ @ \Rightarrow \boxed{(x^2+1) \cdot \arctan'(x) = 1} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}}$$

PL: $\arcsin'(x) = ?$ $\quad \sin(\arcsin(x)) = x$

$$\Rightarrow \sin'(\arcsin(x)) \cdot \arcsin'(x) = 1$$

$$\cos(\arcsin(x)) \cdot \arcsin'(x) = 1 \qquad \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

$$\underbrace{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2}}_{= \sqrt{1-x^2}} \cdot \arcsin'(x) = 1 \qquad \boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

64. OLDAL

TOVÁBBI HÍRES DERIVÁLTAK (PL: $\mathrm{arth}'(x)=?$)
A HIVATALOS KÉPLET GYŰJTEMÉNYEN!

PÉLDÁK:

$$f(x)=(2x+1)^5 \Rightarrow f'(x)=5\cdot(2x+1)^4\cdot 2$$

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} \quad : f'(x)=?$$ TRÜKK: EGYSZERŰSÍTS!

$$f(x)=\frac{x^1+x^{1/2}}{x^{1/3}}=x^{2/3}+x^{1/6} \quad f'(x)=\frac{2}{3}\cdot x^{-1/3}+\frac{1}{6}\cdot x^{-5/6}$$

$$f(x)=\frac{3^x+5^x}{7^x} \quad f'(x)=? \quad f(x)=\left(\frac{3}{7}\right)^x+\left(\frac{5}{7}\right)^x=$$

$$=\exp\left(\ln\left(\frac{3}{7}\right)\cdot x\right)+\exp\left(\ln\left(\frac{5}{7}\right)\cdot x\right)$$

$$f'(x)=\exp\left(\ln\left(\frac{3}{7}\right)\cdot x\right)\cdot\ln\left(\frac{3}{7}\right)+\exp\left(\ln\left(\frac{5}{7}\right)\cdot x\right)\cdot\ln\left(\frac{5}{7}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{7}\right)^x\cdot\ln\left(\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{5}{7}\right)^x\cdot\ln\left(\frac{5}{7}\right)$$

$$f(x)=e^x\cdot x^3 \quad f'(x)=(e^x)'\cdot x^3+e^x\cdot(x^3)'=$$

$$=e^x\cdot x^3+e^x\cdot 3x^2=e^x\cdot x^2\cdot(x+3)$$

$f(x) = \sin^2(x) \quad f'(x) = (2 \cdot \sin(x)) \cdot \sin'(x)$

$= 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

$g(t) = \sin(t^2) \quad g'(t) = \sin'(t^2) \cdot (t^2)'$

$= \cos(t^2) \cdot 2t$

$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$

$(x^2 \cdot \cos(x) \cdot \ln(x))' =$

$2x \cdot \cos(x) \cdot \ln(x) + x^2 \cdot (-\sin(x)) \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x) = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2}$

$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad f'(x) = \frac{-1}{(x^2+1)^2} \cdot (x^2+1)' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

UGYANEZ MÁSKÉPP: HÁNYADOS DERIVÁLÁSA:

$f'(x) = \frac{(1)' \cdot (x^2+1) - 1 \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{0 - 2x}{(x^2+1)^2}$ ✓

$\left(\frac{e^x}{x+2}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot (x+2) - e^x \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = (e^x \cdot (x+1)) / (x+2)^2$

66. OLDAL

$f(x) = \sqrt[x]{x}$ $\quad f'(x) = ?$ TRÜKK: $x = e^{\ln(x)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \left(e^{\ln(x)}\right)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln(x)\right)$$

$$f'(x) = \exp'\left(\frac{1}{x} \cdot \ln(x)\right) \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(x)\right)'$$

$$= \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln(x)\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot \ln'(x)\right)$$

$$= \sqrt[x]{x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2} \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= \sqrt[x]{x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 - \ln(x)\right) = x^{\frac{1}{x} - 2} \cdot \left(1 - \ln(x)\right)$$

PL: ÍRJUK FEL ANNAK AZ EGYENESNEK AZ EGYENLETÉT, AMELY PÁRHUZAMOS AZ $y - 2x + 5 = 0$ EGYENESSEL ÉS ÉRINTI AZ $\boxed{y = 2 \cdot \ln(3x)}$ FÜGGVÉNY GÖRBÉJÉT.

MEGOLDÁS: $y - 2x + 5 = 0 \Rightarrow y = 2x - 5 \Rightarrow y'(x) = 2$

EGYENES MEREDEKSÉGE 2. KERESSÜK HÁT MEG AZT AZ x_0 PONTOT, AMIRE $f'(x_0) = 2$, AHOL $f(x) = 2 \cdot \ln(3x)$.

$f(x) = 2 \cdot \ln(3x)$ $\qquad f'(x) = 2 \cdot \ln'(3x) \cdot (3x)'$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{2}{x}$$

KELL: $2 = \frac{2}{x_0} \Rightarrow \boxed{x_0 = 1}$

AZ (x_0, y_0) PONTON ÁTMENŐ, m MEREDEKSÉGŰ EGYENES KÉPLETE: $\boxed{y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}$

MOST: $x_0 = 1$, $y_0 = f(x_0) = 2 \cdot \ln(3)$, $m = 2$

TEHÁT AZ ÉRINTŐ EGYENES KÉPLETE:

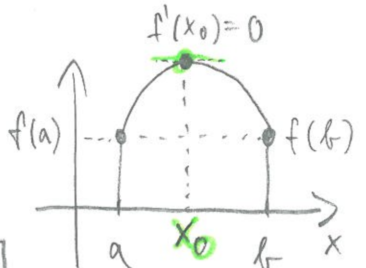
$$y - 2 \cdot \ln(3) = 2 \cdot (x - 1)$$

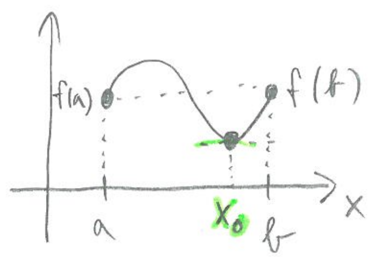
$$\boxed{y = 2x - 2 + 2 \cdot \ln(3)}$$

A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS KÖZÉPÉRTÉK-TÉTELEI:

ROLLE TÉTELE: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ FOLYTONOS AZ $[a, b]$ INTERVALLUMON, DIFF.HATÓ AZ (a, b)-N

HA $f(a) = f(b)$, AKKOR VAN OLYAN $x_0 \in (a, b)$, AHOL $\boxed{f'(x_0) = 0}$





A GRAFIKON ÉRINTŐJE VÍZSZINTES x_0-BAN

NEM BIZ.

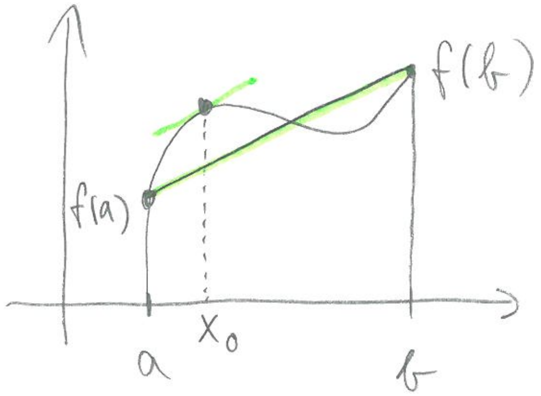
68. OLDAL

LAGRANGE KÖZÉPÉRTÉK-TÉTELE:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ FOLYTONOS ÉS DIFF.NATÓ (a,b)-N

EKKOR VAN OLYAN $x_0\in(a,b)$, HOGY $\boxed{f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

AZAZ: A GRAFIKON ÉRINTŐJE x_0-BAN PÁRHUZAMOS A $P_1(a,f(a))$ ÉS $P_2(b,f(b))$ PONTOKAT ÖSSZEKÖTŐ $\boxed{y=e(x)}$ EGYENESSEL.



BIZ: $\boxed{e(x)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)}$

TÉNYLEG: $e'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ KONSTANS MEREDEKSÉG

TEHÁT $e(x)$ TÉNYLEG EGYENES, ÉS

$$e(a)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(a-a)=f(a) \quad \checkmark$$

$$e(b)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(b-a)=f(b) \quad \checkmark$$

$$\boxed{g(x)=f(x)-e(x)} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g(a)=f(a)-e(a)=0 \\ g(b)=f(b)-e(b)=0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ROLLE}}$$

$\Rightarrow$ VAN OLYAN $x_0\in(a,b)$, HOGY $g'(x_0)=0$, AZAZ

$f'(x_0)-e'(x_0)=0$, AZAZ $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

69. OLDAL

CAUCHY KÖZÉPÉRTÉK-TÉTELE:

f, g FOLYTONOS $[a,b]$-N, DIFF.HATÓ (a,b)-N

ÉS HA $g'(x) \neq 0$ SEMELYIK $x \in (a,b)$-RE,

AKKOR VAN OLYAN $x_0 \in (a,b)$, HOGY

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}} \quad \leftarrow \star$$

BIZ: SEGÉDFÜGGVÉNY:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

$$\underbrace{\boxed{h(a)=0} \quad \boxed{h(b)=0}} \qquad h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x)$$

ROLLE $\Longrightarrow$ VAN OLYAN $x_0 \in (a,b)$, HOGY $h'(x_0) = 0$

AZAZ $f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x_0)$

LEOSZTVA x_0-VAL $\star$-OT KAPJUK!

70. OLDAL

ROLLE: A HEGYEKBEN BICIKLITÚRÁRA MEGYEK. OTTHONRÓL INDULOK, ÉS A TÚRA VÉGÉN ISMÉT HAZATÉREK. ÁLLÍTÁS: KELLETT, HOGY LEGYEN A TÚRA KÖZBEN OLYAN PONT, AMIKOR VÍZSZÍNTESEN MENTEM.

BIZ: LEGYEN a = KILÓMÉTER-SZÁMLÁLÓ ÁLLÁSA INDULÁSKOR
b = —〃— —〃— —〃— ÉRKEZÉSKOR

$a \leq x \leq b$: $f(x)$ = BICIKLIM TENGERSZINT FELETTI MAGASSÁGA AKKOR, AMIKOR A KILÓMÉTER-SZÁMLÁLÓ X-ET MUTAT

ROLLE $\Longrightarrow$ VAN OLYAN $a < x_0 < b$: $f'(x_0) = 0$

AMIKOR A KILÓMÉTER-SZÁMLÁLÓ x_0-T MUTAT, ABBAN A PILLANATBAN VÍZSZÍNTESEN MENTEM

LAGRANGE: HA 200 KM-T UTAZTAM 2 ÓRA ALATT, AKKOR VOLT OLYAN IDŐPONT, AMIKOR 100-AL MENTEM.

BIZ: $\boxed{a=0}$, $\boxed{b=2}$

$0 \leq t \leq 2$: $f(t)$ = t-KOR HANYADIK KM-NÉL JÁRTAM

LAGRANGE: VAN $0 < t < 2$, HOGY $f'(t) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{200-0}{2} = 100$

CAUCHY: HA A KÉTSZER OLYAN HOSSZÚ UTAT TETT MEG UGYANANNYI IDŐ ALATT, MINT B, AKKOR VOLT OLYAN PILLANAT, AMIKOR A SEBESSÉGE KÉTSZER OLYAN NAGY VOLT, MINT B-JÉ. 71. OLDAL